

В. В. ФИЛИПОВ

О РАЗМЕРНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 VI 1972)

Первым результатом заметки будет построение нульмерного наследственно нормального пространства X , которое содержит подпространства X_n , $n = 1, 2, \dots$, $\dim X_n = \text{Ind } X_n = n$. При этом мы существенно будем использовать недавно построенный М. Э. Рудин замечательный пример наследственно сепарабельного нормального не финально компактного пространства. Он строится в дополнительных теоретико-множественных предположениях, а именно, опираясь на существование «суслинского дерева»*.

Напомним построение примера М. Э. Рудин.

Пусть множество S частично упорядочено соотношением $<$ и:

а) для любого элемента $x \in S$ множество $\{y \in S, y < x\}$ вполне упорядочено;

б) всякое подмножество (множества S), состоящее из попарно несравнимых элементов, не более чем счетно;

в) всякое линейно упорядоченное подмножество не более чем счетно;

г) для любого элемента $x \in S$ множество элементов, непосредственно следующих за x , бесконечно;

д) для любого элемента $x \in S$ множество элементов, следующих за x , несчетно.

Существование такого множества («суслинского дерева») не противоречит аксиомам теории множеств.

Каждой точке $x \in S$ поставим в соответствие трансфинит $p(x) < \omega_1$, равный порядковому типу множества $S_x = \{y \in S, y < x\}$.

Каждому предельному трансфиниту $\alpha < \omega_1$ поставим в соответствие сходящуюся к нему монотонно возрастающую последовательность трансфинитов $\theta_n(\alpha)$, $n = 1, 2, \dots$

Каждой точке $x \in S$, $p(x) = \alpha + n$, $n = 0, 1, \dots$, поставим в соответствие счетную последовательность $\xi_n(x)$ подмножеств множества S таких, что:

а) $\xi_n(x)$ есть множество, линейно упорядоченное отношением $<$, оно не содержится ни в каком другом линейно упорядоченном подмножестве множества S и $\sup \{p(y), y \in \xi_n(x)\} = \alpha$;

б) все точки множества $\{y \in \xi_n(x), p(y) < \theta_n(x)\}$ сравнимы с x (и, очевидно, меньше x);

в) если $x_1 \neq x_2$, то при любых m и n множества $\xi_m(x_1)$ и $\xi_n(x_2)$ различны.

Доказать существование таких множеств не составляет труда.

К семейству $O(x)$ отнесем все множества вида

$$\bigcup_{n=i}^{\infty} \{y \in \xi_n, p(y) > \alpha_n\},$$

* Я познакомился с примером М. Э. Рудин по препринту, любезно предоставленному мне А. В. Архангельским. Приводимое здесь описание слегка отличается от содержащегося в препринте и сообщено мне В. М. Золотаревым.

где α_n , $n = i, i + 1, \dots$, — некоторая последовательность трансфинитов, меньших α .

Введем топологию на множестве S , объявив открытыми те множества, которые вместе с каждой своей точкой x содержат некоторый элемент семейства $O(x)$. Построенное пространство S совершенно нормально, наследственно сепарабельно и не финально компактно. Это и есть пример М. Э. Рудин. Его геометрия улавливается леммой, утверждающей, что для любого открытого множества $U \subseteq S$ найдется трансфинит $\alpha < \omega_1$ такой, что

$$U \cap \{y \in S, p(y) \geq \alpha\} = \bigcup_{x \in A} \{y \in S, y \geq x\},$$

где A — некоторое зависящее от U и α подмножество множества $\{x \in S, p(x) = \alpha\}$. Эта лемма, являющаяся одним из основных этапов в доказательстве свойств примера М. Э. Рудин, будет и нами существенно использоваться.

Произведение пространства S на любое пространство со счетной базой также совершенно нормально и, следовательно, наследственно нормально. Чтобы не отвлекаться в дальнейшем от вопросов размерности, заметим здесь же, что регулярное пространство, являющееся объединением наследственно нормального и одноточечного, наследственно нормально.

Пусть K_n — n -мерный куб. Не составляет труда построить N_1 баз $\{B_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ пространства K_n , так, чтобы кратность семейства границ элементов семейства $\bigcup_{\alpha < \omega_1} B_\alpha$ не превосходила n .

В произведении $K_n \times S$ переходим к подпространству X_n , оставляя в множестве $K_n \times \{x\}$ точки (y, x) , где точка $y \in K_n$ не лежит в границе никакого элемента семейства $\bigcup_{p(x) < \alpha < \omega_1} B_\alpha$.

Мы покажем, что $\text{Ind } X_n \geq \dim X_n \geq n$ (первое неравенство верно для всех нормальных пространств); оценка $\text{Ind } X_n \leq n$ также справедлива и получается из аналогичных соображений. Пусть $\{U_1, \dots, U_p\}$ — конечное покрытие пространства K_n , в которое нельзя вписать покрытие кратности $\leq n$, $U_i^* = (U_i \times S) \cap X_n$, $i = 1, \dots, p$. Мы покажем, что всякое конечное покрытие пространства X_n , вписанное в покрытие $\{U_1^*, \dots, U_p^*\}$, имеет кратность $> n$. Пусть Γ — такое покрытие, B — некоторая счетная база пространства K_n , $V(b, \gamma) = \bigcup \{V' : V' \text{ открыто в } S, (V' \times b) \cup X_n \subseteq \gamma\}$, где $b \in B$, $\gamma \in \Gamma$. Из сравнения мощности базы B с $\aleph_1$ следует, что найдется трансфинит $\alpha_0 < \omega_1$ такой, что для всех $b \in B$ и $\gamma \in \Gamma$

$$V(b, \gamma) \cap \{y \in S, p(y) \geq \alpha_0\} = \bigcup_{x \in A(b, \gamma)} \{y \in S, y \geq x\},$$

где $A(b, \gamma)$ подобрано нужным образом.

Пусть $x \in S$, $p(x) = \alpha_0$, $\lambda(\gamma) = \bigcup \{b \in B, (b \times \{x\}) \cap X_n \subseteq \gamma\}$, $\Lambda = \{\lambda(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$. Покажем, что семейство Λ покрывает пространство K_n . Допустим, что это не так, т. е. найдется точка $x_1 \in K_n \setminus \bigcup \Lambda$. Тогда при некоторых $\alpha_1 > \alpha_0$, $y_1 > x$, $b_1 \in B$, $\gamma_1 \in \Gamma$ имеем

$$x_1 \in K_n \setminus \bigcup_{\alpha_1 < \alpha < \omega_1} \{b \setminus b, b \in B\}, (x_1, y_1) \in X_n, y_1 \in V(b_1, \gamma_1).$$

По выбору α_0 , $x \in V(b_1, \gamma_1)$, и, следовательно, $b_1 \times \{x\} \cap X_n \subseteq \gamma_1$, т. е. $x_1 \in \lambda(\gamma_1)$, что противоречит выбору точки x_1 , что и требовалось.

Теперь заметим, что покрытие Λ вписано в покрытие $\{U_1, \dots, U_p\}$ и поэтому его кратность $> n$, а множество $(K_n \times \{x\}) \cap X_n$ плотно в $K_n \times \{x\}$ и поэтому кратность семейства $\{(\lambda \times \{x\}) \cap X_n, \lambda \in \Lambda\}$, вписанного поэлементно в покрытие Γ , $< n$. Из этого следует, что кратность покрытия Γ также $> n$, что и было необходимо для получения оценки $\dim X_n \geq n$.

Мы вложим пространство X_n в нульмерное пространство X_n^* . Для этого добавим к пространству X_n еще одну точку, объявив ее окрестностями дополнения до замкнутых множеств, которые могут быть представлены как объединения не более чем счетного числа множеств вида $(K_n \times \{x\}) \cap X_n$. Как легко видеть, подобные окрестности мы можем подбирать открыто-замкнутыми, при этом дополнения до них будут объединениями счетного числа своих замкнутых нульмерных подпространств вида $K_n \times \{x\} \cap X_n$, из чего легко следуют регулярность и нульмерность пространства.

Чтобы получить нульмерное пространство, в котором лежат все X_n , $n = 1, 2, \dots$, достаточно взять дизъюнктивную сумму пространств X_n^* : $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^*$.

С использованием пространства М. Э. Рудин могут быть построены и другие примеры, связанные с размерностью. Существует нульмерное совершенное отображение одномерного в смысле $\dim$ совершенно нормального пространства на нульмерное — моделью для этого примера может служить пример из (6).

В двух своих обзорах (3, 4) Дж. Нагата ставил вопрос о справедливости формулы $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$ для паракомпактных p -пространств. Положительный ответ дает

Теорема*. Пусть X — нормальное слабо паракомпактное, Y — паракомпактное p -, $X \times Y$ — нормальное счетно паракомпактное, $Y \times \beta Y$ — нормальное пространство. Тогда

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y.$$

Примечание при корректуре. После того как эта заметка была сдана в печать, я получил более сильные результаты, связанные с размерностью произведений, а именно:

Теорема 1. Пусть в произведении $X \times Y$ вполне регулярных топологических пространств проектирование на один из сомножителей есть замкнутое отображение. Тогда

$$\dim \beta(X \times Y) \leq \dim \beta X + \dim \beta Y.$$

Теорема 2. Пусть произведение $X \times Y$ пространства X на паракомпактное p -пространство Y нормально и счетно паракомпактно. Тогда

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y.$$

Аналогичные результаты справедливы и для размерности Ind .

Теорема 3. Пусть произведение $X \times Y$ топологических пространств нормально и проектирование на один из сомножителей является замкнутым отображением. Если в сомножителях выполняется теорема суммы для размерности Ind для конечного числа замкнутых подмножеств, то

$$\text{Ind } X \times Y \leq \text{Ind } X + \text{Ind } Y.$$

Теорема 4. Пусть произведение $X \times Y$ пространства X на паракомпактное p -пространство Y нормально и счетно паракомпактно. Если в сомножителях выполняется теорема суммы для размерности Ind для конечного числа замкнутых подмножеств, то

$$\text{Ind } X \times Y \leq \text{Ind } X + \text{Ind } Y.$$

См. также (1, 5).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. А. Пасынков, ДАН, 189, № 2 (1969). ² Б. А. Пасынков, ДАН, 209, № 4 (1973). ³ J. Nagata, Proc. 2nd Prague Top. Symp., 1966, p. 259. ⁴ J. Nagata, General Topology and its Appl., 1, № 1, 65 (1971). ⁵ Y. Kodama, Am. J. Math., 91, № 2, 486 (1969). ⁶ В. В. Филиппов, ДАН, 205, № 1 (1972).

* Как мне стало известно, одновременно и независимо этот же результат спектральными методами получила Б. А. Пасынков (2).