

Ю. И. БОГОЛЮБОВ

ОБ УРАВНЕНИИ $\varphi(z) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(x + y)$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 VIII 1972)

1. Работами Г. С. Хованского ⁽¹⁾ показано, что широкий класс уравнений и систем уравнений допускает изображение номограммами с ориентированным транспарантом. Одной из канонических форм зависимостей, изображаемых шкальными номограммами с непрозрачным ориентированным транспарантом, является зависимость, которая задается уравнением вида

$$\varphi(z) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(x + y). \quad (1)$$

Представляет интерес вопрос о преобразованиях, которым может быть подвергнута эта номограмма.

С аналитической точки зрения указанный вопрос превращается в вопрос о возможности перехода от уравнения (1) к некоторому эквивалентному уравнению того же вида. Все рассматриваемые функции будем считать достаточно гладкими. Если левая часть (1) зафиксирована, то преобразования, которым могут быть подвергнуты функции φ_1 , φ_2 , φ_3 , очевидны:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &\rightarrow \varphi_1(x) + kx + k_1, & \varphi_2(y) &\rightarrow \varphi_2(y) + ky + k_2, \\ \varphi_3(x + y) &\rightarrow \varphi_3(x + y) - k(x + y) - k_1 - k_2, \end{aligned}$$

где k , k_1 , k_2 — произвольные константы. Ясно, кроме того, что левая часть уравнения (1) может быть подвергнута линейному преобразованию с постоянными коэффициентами. Примером зависимости вида (1), допускающей нетривиальное преобразование левой части, является уравнение

$$z = -\xi(x) - \xi(y) + \xi(x + y), \quad (2)$$

где $\xi(u)$ — одна из основных функций Вейерштрасса ⁽²⁾. Хорошо известны тождества

$$-\xi(x) - \xi(y) + \xi(x + y) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)}, \quad (3)$$

$$\wp(x) + \wp(y) + \wp(x + y) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)} \right)^2, \quad (4)$$

выражающие теорему сложения для функций Вейерштрасса $\xi(u)$ и $\wp(u)$. Из (3), (4) непосредственно следует, что уравнение (2) может быть представлено также в виде

$$z^2 = \wp(x) + \wp(y) + \wp(x + y).$$

Этот пример оказывается в некотором смысле типичным, а именно, удается доказать, что возможность нелинейных преобразований левой части (1) связана, вообще говоря, с наличием некоторых тождеств для эллиптических функций от нескольких переменных.

2. Обозначим правую часть (1) через $\varphi(x, y)$ и предположим, что существует тождество вида

$$A(\varphi) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x + y), \quad (5)$$

где функция $A(\xi)$ нелинейна, т. е. $A''(\xi) \neq 0$. В качестве особого случая выделяется случай, когда одну из функций f_1 , f_2 , f_3 можно положить тож-

дественно равной нулю (или тождественно равна нулю одна из функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$). Этот случай был исследован автором ранее ⁽³⁾ (оказалось, что функции φ_i, f_i должны быть элементарными функциями определенного вида). Поэтому будем считать дальше, что функции φ_i, f_i отличны от нуля, более того, они должны быть нелинейными. Так как наряду с тождеством (5) имеет место тождество

$$A(\varphi) + k\varphi \equiv (f_1 + k\varphi_1) + (f_2 + k\varphi_2) + (f_3 + k\varphi_3),$$

то наряду с условиями $\varphi_i'' \neq 0, f_i'' \neq 0, i = 1, 2, 3$, мы наложим условие $f_i'' + k\varphi_i'' \neq 0$, т. е. $f_i''/\varphi_i'' \neq \text{const}, i = 1, 2, 3$.

Исключая из (5) функцию f_3 , получим

$$A'(\varphi)(\varphi'_x - \varphi'_y) \equiv f'_1(x) - f'_2(y),$$

или

$$A'(\varphi) \equiv \frac{f'_1 - f'_2}{\varphi'_1 - \varphi'_2}. \quad (6)$$

Исключим из (6) функцию $A'(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} &\equiv \frac{\varphi'_1 + \varphi'_3}{\varphi'_2 + \varphi'_3} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f'_1 - f'_2}{\varphi'_1 - \varphi'_2} \right) \bigg/ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'_1 - f'_2}{\varphi'_1 - \varphi'_2} \right) \equiv \\ &\equiv - \frac{f''_1(\varphi'_1 - \varphi'_2) - \varphi''_1(f'_1 - f'_2)}{f''_2(\varphi'_1 - \varphi'_2) - \varphi''_2(f'_1 - f'_2)}, \end{aligned}$$

или

$$\varphi'_3(x+y) \equiv \frac{(f''_2\varphi'_1 + f''_2\varphi'_1)(\varphi'_1 - \varphi'_2) - (\varphi''_1\varphi'_2 + \varphi''_2\varphi'_1)(f'_1 - f'_2)}{(f''_1 + f''_2)(\varphi'_1 - \varphi'_2) - (\varphi''_1 + \varphi''_2)(f'_1 - f'_2)}. \quad (7)$$

Исключая, наконец, из тождества (7) функцию φ'_3 , приходим к тождеству

$$\begin{aligned} &[f'''_1(\varphi'_1 - \varphi'_2) - \varphi'''_1(f'_1 - f'_2)] \cdot [f''_2(\varphi'_1 - \varphi'_2) - \varphi''_2(f'_1 - f'_2)] + \\ &+ [f'''_2(\varphi'_1 - \varphi'_2) - \varphi'''_2(f'_1 - f'_2)] \cdot [f''_1(\varphi'_1 - \varphi'_2) - \varphi''_1(f'_1 - f'_2)] + \\ &+ 2(f''_1\varphi'_2 - f''_2\varphi'_1)[(f''_1 + f''_2)(\varphi'_1 - \varphi'_2) - (\varphi''_1 + \varphi''_2)(f'_1 - f'_2)] \equiv 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема 1. Для того чтобы функции $f_i, \varphi_i, i = 1, 2$, удовлетворяли тождеству (8) и условиям $f_i'' \neq 0, \varphi_i'' \neq 0, f_i/\varphi_i \neq \text{const}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$f''_i = A_0\varphi_i'^2 + 2A_1\varphi_i f'_i + A_2f_i'^2 + 2B_0\varphi_i + 2B_1f'_i + C_0, \quad (9)$$

$$-\varphi''_i = A_1\varphi_i'^2 + 2A_2\varphi_i f'_i + A_3f_i'^2 + 2B_1\varphi_i + 2B_2f'_i + C_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &A_0\varphi_i'^3 + 3A_1\varphi_i'^2 f'_i + 3A_2\varphi_i f_i'^2 + A_3f_i'^3 + 3B_0\varphi_i'^2 + 6B_1\varphi_i f'_i + \\ &+ 3B_2f_i'^2 + 3C_0\varphi_i + 2C_1f'_i + D_0 = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, D_0$ — некоторые константы, и кубическая кривая

$$\begin{aligned} &A_0x^3 + 3A_1x^2y + 3A_2xy^2 + A_3y^3 + 3B_0x^2 + 6B_1xy + \\ &+ 3B_2y^2 + 3C_0x + 3C_1y + D_0 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

неприводима.

С помощью проективного преобразования уравнение кривой (12) можно привести к виду

$$\bar{y}^2 = 4\bar{x}^3 - g_2\bar{x} - g_3. \quad (13)$$

Если аналогичную подстановку по формулам

$$f'_i = \frac{a_{11}\bar{f}'_i + a_{12}\bar{\varphi}'_i + a_{13}}{a_{31}\bar{f}'_i + a_{32}\bar{\varphi}'_i + a_{33}}, \quad \varphi'_i = \frac{a_{21}\bar{f}'_i + a_{22}\bar{\varphi}'_i + a_{23}}{a_{31}\bar{f}'_i + a_{32}\bar{\varphi}'_i + a_{33}}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

произведем в системе уравнений (9) — (11), то придем к системе уравнений

$$\bar{\varphi}''_i = h\bar{f}'_i, \quad \bar{f}''_i = 6h\bar{\varphi}_i'^2 - 1/2g_2h, \quad \bar{f}_i'^2 = 4\bar{\varphi}_i'^3 - g_2\bar{\varphi}_i' - g_3$$

(h — некоторая константа), откуда находим $\bar{\varphi}_i' = \wp(hu)$, $f_i' = \wp'(hu)$. Изменяя масштаб переменных x, y , положим $h = 1$; тогда, согласно формулам (14), будем иметь

$$f_i'(u) = \frac{a_{11}\wp'(u) + a_{12}\wp(u) + a_{13}}{a_{31}\wp'(u) + a_{32}\wp(u) + a_{33}}, \quad \varphi_i'(u) = \frac{a_{21}\wp'(u) + a_{22}\wp(u) + a_{23}}{a_{31}\wp'(u) + a_{32}\wp(u) + a_{33}}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Заметим, что константы a_{ij} в формулах (15) являются комплексными числами. Интегрирование правых частей (15) позволяет выделить следующие уравнения вида (1), допускающие нелинейное преобразование функции $\varphi(z)$:

$$\varphi = -\zeta(x) - \zeta(y) + \zeta(x+y) \equiv \frac{1}{2} \frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)}, \quad A(\varphi) = \varphi^2 = \wp(x) + \wp(y) + \wp(x+y), \quad (16)$$

$$\varphi = \zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(a) - \zeta(x+y+a) \equiv \frac{\sigma(x+a)\sigma(y+a)\sigma(x+y)}{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(a)\sigma(x+y+a)}, \quad A(\varphi) = \ln \varphi, \quad (17)$$

где a — произвольное комплексное число, не совпадающее с какой-либо вершиной параллелограмма периодов;

$$\varphi = \ln \frac{\sigma(x-a_1)\sigma(y-a_1)\sigma(x+y+a_1)\sigma(a_2-a_3)}{\sigma(x-a_3)\sigma(y-a_3)\sigma(x+y+a_3)\sigma(a_1-a_2)}, \quad (18)$$

$$A(\varphi) = \ln(e^\varphi + 1) = \ln \frac{\sigma(x-a_2)\sigma(y-a_2)\sigma(x+y+a_2)\sigma(a_1-a_3)}{\sigma(x-a_3)\sigma(y-a_3)\sigma(x+y+a_3)\sigma(a_1-a_2)},$$

где $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$;

$$\varphi = \sin(2x + \alpha) + \sin(2y + \alpha) - \sin[2(x+y) + \alpha] - \sin \alpha \equiv 4 \sin x \sin y \sin(x+y+\alpha), \quad A(\varphi) = \ln \varphi; \quad (19)$$

$$\varphi = c_1 e^x + c_2 e^y + c_3 e^{-x-y}, \quad A(\varphi) = \varphi^2, \quad c_1 c_2 c_3 \neq 0; \quad (20)$$

$$\varphi = (x^3 - 3ax^2) + (y^3 - 3ay^2) - (x+y)^3 + 3a(x+y)^2 \equiv -3xy(x+y-2a), \quad A(\varphi) = \ln \varphi; \quad (21)$$

$$\varphi = x^2 + y^2 + (x+y)^2, \quad A(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2 = x^4 + y^4 + (x+y)^4. \quad (22)$$

Теорема 2. Если уравнение (1) допускает нелинейное преобразование левой части, то при сформулированных выше условиях это уравнение приводится к одной из форм (16) — (22).

Заметим в заключение, что формулы (18) основаны на следующем интересном тождестве для σ -функций Вейерштрасса:

$$\sigma(x-a_1)\sigma(y-a_1)\sigma(x+y+a_1)\sigma(a_2-a_3) + \sigma(x-a_2)\sigma(y-a_2)\sigma(x+y+a_2)\sigma(a_3-a_1) + \sigma(x-a_3)\sigma(y-a_3)\sigma(x+y+a_3)\sigma(a_1-a_2) = 0, \quad (23)$$

где $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$.

Тождество (23) можно доказать, используя стандартную технику рассмотрения нулей и полюсов эллиптических функций⁽²⁾.

Автор выражает глубокую благодарность Е. Н. Кузьмину за ценное обсуждение работы и внимание.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. С. Хованский, Методы номографирования, М., 1964. ² Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, М., 1970. ³ Ю. И. Боголюбов, Номографический сборн., № 9, 1972.