

Д. В. ПЕЧЕРСКИЙ

О ПЕРЕСТАНОВКАХ ЧЛЕНОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 30 VI 1972)

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1)$$

некоторый ряд из элементов того или другого пространства, A — какой-нибудь метод суммирования. Множество всех значений, к которым ряд (1) сходится (суммируется методом A) в том или другом смысле при всевозможных перестановках членов ряда, называется областью сумм (областью A -сумм) ряда (1).

В настоящей заметке рассматриваются области сумм рядов в конечно-мерных пространствах, пространствах L_p и рядов из измеримых функций, а также области A -сумм этих рядов для полунепрерывных методов Перрона A (см. (1)).

В дальнейшем символом E будет обозначаться n -мерное евклидово пространство E^n или пространство $L_p[0, 1]$. Первый случай будет выделяться записью $E = E^n$, второй случай — $E = L_p$.

Определение 1. Пусть (1) — ряд из векторов E . Множество всех векторов $s \in E$, к которым ряд (1) сходится в метрике E (слабо сходится) при всевозможных перестановках членов ряда, называется сильной (соответственно слабой) областью сумм ряда (1). (Определение слабой сходимости дано в (2), стр. 182.)

Теорема 1. Пусть (1) — ряд из векторов E , удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\| &= 0, \text{ когда } E = E^n, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 &< \infty, \text{ когда } E = L_p, p \geq 2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^p &< \infty, \text{ когда } E = L_p, 1 < p < 2. \end{aligned} \quad (2)$$

(Условия (2) впервые сформулированы в (3).)

Тогда, для того чтобы вектор $s \in E$ принадлежал сильной области сумм ряда (1), необходимо и достаточно, чтобы для любого функционала $F(y) \in E^*$ величина $F(s)$ принадлежала области сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(u_k). \quad (3)$$

При доказательстве теоремы 1 используется следующая комбинаторная Лемма. Пусть Σ — конечное кольцо множеств*, $u(T)$ — аддитивная функция множеств, определенная на Σ и принимающая значения в линей-

* Определение кольца множеств дано в (2), стр. 38.

ном нормированном пространстве W , ε — произвольное неотрицательное число, $\varepsilon \geq 0$.

Тогда, если $u(T)$ обладает тем свойством, что для любого множества $A \in \Sigma$ существует множество $B \in \Sigma$, $B \subseteq A$, такое, что

$$\|u(B) - \frac{1}{2}u(A)\| \leq \varepsilon,$$

то множество U всех значений функции $u(T)$ на Σ образует 2ε -сеть своей выпуклой оболочки $G(U)$.

Как следствия из теоремы 1 получаются следующие теоремы.

Теорема 2. Если ряд (1) из векторов E удовлетворяет условиям (2), то сильная и слабая области сумм этого ряда совпадают.

Теорема 3. Пусть ряд (1) из векторов E удовлетворяет условиям (2).

Тогда, для того чтобы сильной областью сумм ряда (1) было всё E , необходимо и достаточно, чтобы для любого функционала $F(y) \in E^*$, $\|F\| = 1$, областью сумм ряда (3) была вся действительная прямая.

В случае, когда $E = E^n$, теорема 3 была доказана Е. Штейницем⁽⁴⁾.

Определение 2. Пусть $\Phi = \{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ — последовательность вещественно-значных функций, определенных на полуинтервале $[0, 1)$.

Мы будем говорить, что ряд (1) суммируется методом Φ к вектору $u \in E$ в метрике E , если при любом $t \in [0, 1)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) u_k$$

сходится в метрике E к некоторому вектору $v(t) \in E$ и $\lim_{t \rightarrow 1-0} v(t) = s$ в метрике E .

Определение 3. Мы будем говорить, что ряд (1) слабо суммируется методом Φ к вектору $s \in E$, если для любого функционала $F(y) \in E^*$ ряд (3) суммируется методом Φ к числу $F(s)$.

Определение 4. Множество всех векторов $s \in E$, к которым ряд (1) суммируется методом Φ в метрике E (слабо суммируется методом Φ) при всевозможных перестановках членов ряда, называется сильной (соответственно слабой) областью Φ -сумм ряда (1).

Теорема 4. Пусть ряд (1) из векторов E удовлетворяет условиям (2).

Тогда, если метод суммирования Φ вполне регулярен для рядов с действительными членами, то сильная и слабая области Φ -сумм ряда (1) совпадают с сильной областью сумм этого ряда.

Определение 5. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{4}$$

— ряд из измеримых действительных функций, $x \in [0, 1]$, $\Phi = \{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ — метод суммирования. Множество всех функций $P(x)$, конечных почти всюду на $[0, 1]$, к которым ряд (4) сходится (суммируется методом Φ) почти всюду на $[0, 1]$ при всевозможных перестановках членов ряда, называется областью сумм ряда (4) в смысле сходимости почти всюду (областью Φ -сумм ряда (4) в смысле суммируемости почти всюду).

Теорема 5. Пусть (4) — ряд из измеримых функций, удовлетворяющий условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(x) < \infty \text{ п. в. на } [0, 1]. \tag{5}$$

Тогда для любого вполне регулярного метода суммирования Φ область Φ -сумм ряда (4) в смысле суммируемости почти всюду совпадает с областью сумм этого ряда в смысле сходимости почти всюду.

Теорема 5 является некоторым обобщением одной из теорем Е. М. Никишина (см. (5)).

Условие полной регулярности метода Φ в теоремах 4 и 5 нельзя заменить условием простой регулярности.

Действительно, члены ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (6)$$

принадлежат $L_2[0, 1]$ и удовлетворяют условиям (2) и (5).

Как непосредственно видно, область сумм ряда (6) есть пустое множество. В то же время, как известно, для любого действительного s существует регулярный метод Φ , суммирующий ряд (6) к s (см. (6)).

В заключение мне хотелось бы поблагодарить чл.-корр. АН СССР Д. Е. Меньшова за многочисленные обсуждения этих результатов.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ O. Perron, Zur Theorie der divergenten Reihen, 6 (1920). ² А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972. ³ М. И. Кадец, УМН, 9, в. 1 (1954). ⁴ E. Steinitz, J. reine u. angew. Math., 143 (1913); 144 (1914); 146 (1916). ⁵ Е. М. Никишин, Матем. заметки, 1, 2 (1967). ⁶ В. М. Даревский, Матем. сборн., 7 (49) (1940).