Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Л. И. САЗОНОВ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 3 VII 1972)

1°. В настоящей работе приводится метод решения задачи линейного сопряжения аналитических функций двух комплексных переменных, в основе которого лежат результаты о факторизации оператор-функций, изложенные в работе ([1]). Применение операторной факторизации позволяет выяснить структуру решения задачи линейного сопряжения.

Рассмотрен также один частный случай уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости, для которого решение получено в замкнутой форме. Этот результат близок к результатам работы ([2]), в которой несколько частных случаев уравнения Винера — Хопфа решены совершенно иными методами.

2°. Пусть $\mathscr{D}_i^+$, $\mathscr{D}_i^-$, $i=1, 2$,— соответственно внутренность и внешность единичной окружности Γ_i, $\mathscr{D}_{\pm\pm}=\mathscr{D}_1^\pm\times\mathscr{D}_2^\pm$ — бицилиндры пространства двух комплексных переменных z_1 и z_2, $T=\{(z_1, z_2), |z_1|=|z_2|=1\}$ — общий остов этих бицилиндров (тор), $a(t_1, t_2)$, $b(t_1, t_2)$, $c(t_1, t_2)$, $d(t_1, t_2)$ — непрерывные комплексные функции на торе T, H_{++}, H_{+-}, H_{-+}, H_{--} — классы функций, аналитических в соответствующих бицилиндрах и представимых там интегралом типа Коши

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint\limits_T \frac{\varphi(t_1, t_2)}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}\,dt_1\,dt_2$$

с плотностью $\varphi(t_1, t_2)$, суммируемой на T с квадратом ($\varphi(t_1, t_2)\in L_2(T)$).

Задача линейного сопряжения состоит в отыскании четырех функций $\Phi^{\pm\pm}$ из соответствующих H-классов при условии, что их предельные значения почти всюду на T удовлетворяют линейному соотношению

$$a\Phi^{++}+b\Phi^{+-}+c\Phi^{-+}+d\Phi^{--}=\Psi, \quad \Psi\in L_2(T). \tag{1}$$

В работе ([3]) установлен следующий критерий нётеровости задачи линейного сопряжения для бицилиндров: задача (1) удовлетворяет теории Нётера тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $a(t_1, t_2)\neq 0$, $b(t_1, t_2)\neq 0$, $c(t_1, t_2)\neq 0$, $d(t_1, t_2)\neq 0$ на T;

2) $\varkappa_1(a)=\varkappa_1(c)$, $\varkappa_1(b)=\varkappa_1(d)$, $\varkappa_2(a)=\varkappa_2(b)$, $\varkappa_2(c)=\varkappa_2(d)$, где $\varkappa_i(a)=(1/2\pi)\Delta_{\Gamma_i}\arg a(t_1, t_2)$.

3°. Рассмотрим пространство $L_2(\Gamma_1, L_2(\Gamma_2))$ измеримых векторнозначных функций $f(t_1)$, определенных на Γ_1, принимающих значения в $L_2(\Gamma_2)$ и таких, что

$$\int\limits_{\Gamma_1}\|f(t_1)\|^2_{L_2(\Gamma_2)}\,|dt_1|<\infty.$$

Обозначим через H_+ (H_-)-класс вектор-функций, принимающих значения в $L_2(\Gamma_2)$, аналитических в $\mathscr{D}_1^+$ ($\mathscr{D}_1^-$) и представимых там интегралом типа Коши $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\varphi(t_1)}{t_1-z_1}\,dt_1$ с плотностью $\varphi(t_1)\in L_2(\Gamma_1, L_2(\Gamma_2))$.

Задача линейного сопряжения (1) эквивалентна задаче определения двух вектор-функций $\Phi^+(t_1)$ и $\Phi^-(t_1)$ из соответствующих H-классов по условию на Γ_1

$$A(t_1)\Phi^+(t_1)+B(t_1)\Phi^-(t_1)=\Psi(t_1), \tag{2}$$

где $A(t_1)$ и $B(t_1)$ — оператор-функции следующего вида:

$$\begin{aligned} A(t_1)&=T_{a(t_1,\cdot)}P_+-T_{b(t_1,\cdot)}P_-,\\ B(t_1)&=T_{c(t_1,\cdot)}P_+-T_{d(t_1,\cdot)}P_-, \end{aligned} \tag{3}$$

причем в формулах (3) символами $T_{g(t_1,\cdot)}$ и $P_\pm$ обозначены операторы в $L_2(\Gamma_2)$, определенные формулами

$$T_{g(t_1\cdot)}\varphi(t_2)=g(t_1,t_2)\varphi(t_2),$$

$$(P_\pm\varphi)(t_2)=\frac{1}{2}\varphi(t_2)\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2-t_2}\,d\tau_2.$$

Через W обозначим B-алгебру оператор-функций $G(t_1)$, определенных на Γ_1, принимающих значения в пространстве линейных ограниченных операторов в $L_2(\Gamma_2)$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье на Γ_1. Через W_k обозначим множество оператор-функций из W, принимающих значения в идеале всех вполне непрерывных операторов, действующих в $L_2(\Gamma_2)$.

4°. В дальнейшем будем рассматривать задачу линейного сопряжения при следующих предположениях:

1) функции $a(t_1,t_2)$, $b(t_1,t_2)$, $c(t_1,t_2)$, $d(t_1,t_2)$ представимы в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье на T;

2) задача линейного сопряжения (1) удовлетворяет теории Нётера.

При выполнении этих условий оператор-функции $A(t_1)$ и $B(t_1)$ обратимы при любом фиксированном $t_1\in\Gamma_1$, а оператор-функции $A^{\pm1}(t_1)$, $B^{\pm1}(t_1)$ принадлежат алгебре W.

Нетрудно показать, что оператор-функцию $B^{-1}(t_1)A(t_1)$ можно представить в виде

$$B^{-1}(t_1)A(t_1)=T_{h(t_1,\cdot)}P_++T_{g(t_1,\cdot)}P_-+K(t_1),$$

где

$$K(t_1)\in W_k,\quad h(t_1,t_2)=\frac{a(t_1,t_2)}{c(t_1,t_2)},\quad g(t_1,t_2)=\frac{b(t_1,t_2)}{d(t_1,t_2)},$$

причем в силу условий нётеровости задачи (1) для функций h и g справедливы соотношения

$$\varkappa_1(h)=\varkappa_1(g)=0,\quad \varkappa_2(g)=\varkappa_2(h).$$

Лемма 1. *Оператор-функция $B^{-1}(t_1)A(t_1)$ представима в виде*

$$B^{-1}(t_1)A(t_1)=N_-(t_1)(I+M(t_1))N_+(t_2), \tag{4}$$

где оператор-функции $N_+(t_1)$ и $N_-(t_1)$ принадлежат алгебре W, голоморфно продолжимы в $\mathcal{D}_1^+$ и $\mathcal{D}_1^-$ соответственно и в точках $z_1\in\mathcal{D}_1^+\cup\Gamma_1$ и $z_1\in\mathcal{D}_1^-\cup\Gamma_1$ принимают значения в множестве обратимых характеристических сингулярных операторов, действующих в $L_2(\Gamma_2)$; оператор-функция $M(t_1)$ принадлежит множеству W_k, а $I+M(t_1)$ является обратимым оператором при любом фиксированном $t_1\in\Gamma_1$.

Используя результаты работы ([1]) о факторизации оператор-функций, представим оператор функцию $I+M(t_1)$ в виде

$$I+M(t_1)=R_-(t_1)D(t_1)R_+(t_1), \tag{5}$$

где $R_+(t_1)$ и $R_-(t_1)$ — оператор-функции, которые голоморфно продолжимы в $\mathscr{D}_1^+$ и $\mathscr{D}_1^-$ соответственно и обратимы в замыкании областей $\mathscr{D}_1^+$ и $\mathscr{D}_1^-$, $D(t_1)=\sum_{j=1}^{n} t_1^{\varkappa_j}P_j$; P_j — ортопроекторы в $L_2(\Gamma_2)$ такие, что

$$\dim \operatorname{Im} P_j<\infty,\ j=1,\ldots,n-1, \qquad \sum_{j=1}^{n} P_j=I,$$

$\varkappa_1>\varkappa_2>\ldots>\varkappa_{n-1}$, $\varkappa_n=0$ — целые числа. Применяя лемму 1 и представление (5) к краевому условию (2), приведем его к виду

$$D(t_1)\varphi^+(t_1)+\varphi^-(t_1)=F(t_1), \tag{6}$$

где

$$\varphi^+(t_1)=R_+(t_1)N_+(t_1)\Phi^+(t_1), \quad \varphi^-(t_1)=[N_-(t_1)R_-(t_1)]^{-1}\Phi^-(t_1),$$
$$F(t_1)=[B(t_1)N_-(t_1)R_-(t_1)]^{-1}\Psi(t_1).$$

Теорема 1. *Пусть, для определенности,* $\varkappa_j>0$ *при* $1\leqslant j<m<n$. *Задача линейного сопряжения* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\Gamma_1}[P_jF(\cdot)](t_1)\,t_1^{s-1}\,dt_1=0,\ s=0,1,\ldots,\varkappa_j-1, \quad 1\leqslant j<m.$$

При выполнении этих условий решение задачи (2) *дается формулами*

$$\begin{aligned}\Phi^+(z_1)&=[R_+(z_1)N_+(z_1)]^{-1}\varphi^+(z_1), \quad z_1\in\mathscr{D}_1^+,\\ \Phi^-(z_1)&=N_-(z_1)R_-(z_1)\varphi^-(z_1), \quad z_1\in\mathscr{D}_1^-,\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\varphi^+(z_1)=\sum_{j=1}^{n} z_1^{-\varkappa_j}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{[P_jF(\cdot)](t_1)}{t_1-z_1}dt_1+\sum_{j=m}^{n-1}\psi_j(z_1), \quad z_1\in\mathscr{D}_1^+,$$

$$\chi^-(z_1)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{F(t_1)}{t_1-z_1}dt_1-\sum_{j=m}^{n-1}z_1^{-\varkappa_j}\psi_j(z_1), \quad z_1\in\mathscr{D}_1^-,$$

$\psi_j(z_1)$ — *произвольные полиномы степени не выше* $-\varkappa_j-1$ *со значениями в пространствах* $\operatorname{Im} P_j\subset L_2(\Gamma_2)$.

Следствие. *Пусть* α *обозначает число линейно независимых решений, а* β — *число условий разрешимости задачи линейного сопряжения* (1).

Тогда числа α *и* β *вычисляются по формулам*

$$\alpha=-\sum_{\varkappa_j<0}\varkappa_j(\dim \operatorname{Im} P_j), \quad \beta=\sum_{\varkappa_j>0}\varkappa_j(\dim \operatorname{Im} P_j).$$

5°. Пусть l_2 — пространство последовательностей $\{\varphi_{ks}\}_{k,s=0}^{\infty}$, суммируемых с квадратом $\left(\sum_0^\infty|\varphi_{ks}|^2<\infty\right)$. Применим полученные результаты к решению в пространстве l_2 уравнения Винера — Хопфа

$$\sum_{k,\,s=0}^{\infty} a_{m-k\ n-s}\varphi_{ks}=f_{mn}, \quad m,n=0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

где f_{mn} и a_{ks} — известные числа такие, что

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty}|f_{mn}|^2<\infty, \quad \sum_{k,\,s=-\infty}^{\infty} a_{ks}<\infty.$$

Уравнение (9) эквивалентно задаче линейного сопряжения

$$A(t_1)\Phi^+(t_1) + \Phi^-(t_1) = \Psi(t_1), \tag{10}$$

в которой

$$A(t_1) = T_{a(t_1,\cdot)} P_+ + P_-, \quad a(t_1, t_2) = \sum_{k,\, s=-\infty}^{\infty} a_{ks} t_1^k t_2^s$$

$$\Psi(t_1) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} f_{mn} t_1^m t_2^n.$$

Пусть уравнение Винера — Хопфа (9) удовлетворяет теории Нётера, тогда функция $a(t_1, t_2)$ не обращается в нуль, имеет нулевые частные индексы $\varkappa_1(a) = \varkappa_2(a) = 0$ и может быть представлена в виде

$$a(t_1, t_2) = \frac{a^{++}(t_1, t_2)\, a^{--}(t_1, t_2)}{a^{+-}(t_1, t_2)\, a^{-+}(t_1, t_2)},$$

где функции $a^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ аналитически продолжаются в соответствующие бицилиндры и не имеют там нулей.

Мы рассмотрим один частный случай уравнения Винера — Хопфа, когда решение этого уравнения может быть получено в явной форме. Предположим, что функция $a^{+-}(t_1, t_2)$ имеет вид

$$a^{+-}(t_1, t_2) = a_0^+(t_1) + a_1^+(t_1)\, t_2^{-1}. \tag{11}$$

Тогда оператор-функция $A(t_1)$ допускает факторизацию

$$A(t_1) = A_-(t_1)\,(I + T_{f^-(t_1,\cdot)} P_0)\,(I + T_{f^+(t_1,\cdot)} P_0)\, A_+(t_1),$$

в которой

$$A_\pm(t_1) = T_{a^{\pm\pm}(t_1,\cdot)}\, T^{-1}_{a^{\pm\mp}(t_1,\cdot)}\, P_+ + P_-,$$

P_0 — проектор в $L_2(\Gamma_2)$, определяемый формулой

$$(P_0\varphi)(t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\varphi(t_2)}{t_2}\, dt_2,$$

функции $f^\pm(t_1, t_2)$ могут быть выражены через элементы факторизации функции $a(t_1, t_2)$.

Применяя указанную факторизацию и теорему 1, получим, что решение задачи сопряжения (10), в которой коэффициент $A(t_1)$ дается формулой (11), имеет вид

$$\Phi^+(z_1) = A_+^{-1}(z_1)\, [I + T_{f^+(z_1,\cdot)} P_0]^{-1} \varphi^+(z_1), \quad z_1 \in \mathscr{D}_1^+,$$

$$\Phi^-(z_1) = -A_-(z_1)\, [I + T_{f^-(z_1,\cdot)} P_0]^{-1} \varphi^-(z_1), \quad z_1 \in \mathscr{D}_1^-,$$

где

$$\varphi^\pm(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{A_-(t_1)\, [I + T_{f^-(t_1,\cdot)} P_0]\, \Psi(t_1)}{t_1 - z_1}\, dt_1, \quad \begin{matrix} z_1 \in \mathscr{D}_1^+, \\ z_1 \in \mathscr{D}_1^-. \end{matrix}$$

В заключение автор выражает глубокую признательность В. А. Какичеву за постоянное внимание к этой работе.

Ростовский государственный
университет

Поступило
26 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, Изв. АН СССР, 28, 1055 (1964). [2] В. А. Малышев, ДАН, 187, № 6 (1969). [3] И. Б. Симоненко, Матем. исследования, 3, 1, 108 (1968), Кишинев.