

УДК 517.91/943

МАТЕМАТИКА

В. В. ГУДКОВ, А. Я. ЛЕПИН

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 VII 1972)

В настоящей работе даются необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи

$$\begin{aligned} x'' &= f(t, x, x'), \quad L_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = 0, \\ L_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где f удовлетворяет условию Каратеодори на $S = I \times R^2$, $I = [a, b] \subset R = (-\infty, \infty)$, $L_1, L_2 \in C(R^4)$ и удовлетворяют определенным условиям монотонности.

Для случая $f \in C(S)$, $L_1 \equiv x(a) - x(b)$, $L_2 \equiv x'(a) - x'(b)$ Г. Кноблех⁽¹⁾ дал достаточные (практически необходимые и достаточные) условия разрешимости задачи (1). Для случая $f \in C(S)$, $L_1 \equiv x(a) - A$, $L_2 \equiv x(b) - B$ К. Шредер⁽²⁾ установил необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1).

Введем ряд обозначений: $AC(I)$ — множество абсолютно непрерывных на I функций; $\text{p}\forall t$ — почти для всех t ; для $\alpha, \beta \in C(I)$, $\varphi, \psi \in C(I \times R)$ определим множества

$$\omega = \{(t, x) : t \in I, \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\},$$

$$\Omega = \{(t, x, x') : t \in I, \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \varphi(t, x) \leq x' \leq \psi(t, x)\},$$

$$T = \{(x, y, z_1, z_2) : \alpha(a) \leq x \leq \beta(a), \alpha(b) \leq y \leq \beta(b),$$

$$\varphi(a, x) \leq z_1 \leq \psi(a, x), \quad \varphi(b, y) \leq z_2 \leq \psi(b, y)\}.$$

Пусть $L_i \in C(R^4)$, $i \in \{1, 2\}$. Поставим в соответствие функции L_i ряд чисел $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \sigma_{i4})$, который мы будем называть типом монотонности функции L_i , так что для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ будет $\sigma_{ij} = 1$, если L_i возрастает по x_j ; $\sigma_{ij} = -1$, если L_i убывает по x_j ; $\sigma_{ij} = 0$, если L_i не зависит от x_j и $\sigma_{ij} = \pm 1$ при произвольной зависимости L_i от x_j . В дальнейшем для краткости мы будем писать $L_i(x)$ вместо $L_i(x(a), x(b), x'(a), x'(b))$.

Пусть в задаче (1) L_1 и L_2 удовлетворяют следующим условиям монотонности: $\sigma_{14}L_1$ принадлежит типу $(-1, 1, 1, 1)$, $\sigma_{21}L_2$ — типу $(1, 1, 1, -1)$, причем L_2 строго монотонна по третьему или четвертому аргументу.

Теорема 1. Пусть

1) $\alpha, \beta \in AC^1(I)$, $\varphi, \psi \in C(I \times R)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \{-1, 1\}$;

2) $\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$;

3) $\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \quad \text{p}\forall t \in I$,

$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)) \quad \text{p}\forall t \in I$;

4) $L_1\alpha = 0 = L_1\beta$, $\sigma_{21}L_2\alpha \geq 0 \geq \sigma_{21}L_2\beta$;

5) $\varphi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ непрерывно дифференцируемы по x , а $\varphi(t, x(t))$ и $\psi(t, x(t)) \quad \forall x \in AC^1(I)$ абсолютно непрерывны;

$$\begin{aligned} 6) \quad & \varphi(t, x) \leq \psi(t, x) \quad \forall (t, x) \in \Omega; \\ 7) \quad & \varphi(t, \alpha(t)) \leq \alpha'(t) \leq \psi(t, \alpha(t)) \quad \forall t \in I, \end{aligned}$$

$$\varphi(t, \beta(t)) \leq \beta'(t) \leq \psi(t, \beta(t)) \quad \forall t \in I;$$

$$8) \quad (f(t, x, \varphi(t, x)) - \varphi'_t(t, x) - \varphi'_x(t, x) \varphi(t, x)) \gamma_1 \geq 0 \quad \forall t \in I,$$

$$\forall x \in [\alpha(t), \beta(t)], (f(t, x, \psi(t, x)) - \psi'_t(t, x) - \psi'_x(t, x) \psi(t, x)) \gamma_2 \geq 0 \\ \forall t \in I, \forall x \in [\alpha(t), \beta(t)];$$

9) по крайней мере для одного набора $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ и $\forall (x, y, z_1, z_2) \in T$ выполняются неравенства

$$(1 + \gamma_1) L_i(x, y, \varphi(a, x), z_2) \sigma_{i3} + (1 - \gamma_1) L_j(x, y, z_1, \varphi(b, y)) \sigma_{jk} \leq 0,$$

$$(1 + \gamma_2) L_k(x, y, z_1, \psi(b, y)) \sigma_{k4} + (1 - \gamma_2) L_l(x, y, \psi(a, x), z_2) \sigma_{l3} \geq 0;$$

10) существуют непрерывные продолжения L_1^*, L_2^* функций L_1, L_2 по аргументам z_1 и z_2 вне T того же типа монотонности;

11) L_1^*, L_2^* строго монотонны по z_1 и z_2 , причем L_2^* имеет одинаковую по модулю скорость роста по z_1 и z_2 .

Тогда эти условия являются необходимыми и достаточными для существования решения $x(t)$ задачи (1) такого, что

$$(t, x(t), x'(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I. \quad (2)$$

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности строится краевая задача

$$x'' = F(t, x, x'), \quad \Lambda_1 x = 0, \quad \Lambda_2 x = 0 \quad (3)$$

такая, что

$$F(t, x, x') \equiv f(t, x, x') \quad \forall (t, x, x') \in \Omega, \quad (4)$$

$$\Lambda_i(x, y, z_1, z_2) \equiv L_i(x, y, z_1, z_2) \quad \forall (x, y, z_1, z_2) \in T, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (5)$$

и существование решения которой следует из работы ⁽³⁾. Тогда, если решение $x(t)$ задачи (3) удовлетворяет соотношению (2), то в силу (4) и (5) $x(t)$ будет решением задачи (1). Соотношение (2) доказывается в два этапа: сначала доказываются неравенства $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$, затем неравенства $\varphi(t, x(t)) \leq x'(t) \leq \psi(t, x(t)) \quad \forall t \in I$.

Сформулируем еще четыре аналогичных теоремы.

Теорема 2. Пусть $\sigma_{14} L_1$ типа $(-1, \pm 1, 1, 1)$, $\sigma_{21} L_2$ типа $(1, 1, 1, 0)$, причем L_2 строго монотонна по третьему аргументу; тогда условия 1–3 и 5–8 теоремы 1 и условия

$$4) \quad \sigma_{14} L_1 \alpha \leq 0 \leq \sigma_{14} L_1 \beta, \quad \sigma_{21} L_2 \alpha \geq 0 \geq \sigma_{21} L_2 \beta;$$

9) по крайней мере для одной пары $i, j \in \{1, 2\}$ и $\forall (x, y, z_1, z_2) \in T$ выполняются неравенства

$$(1 + \gamma_1) L_i(x, y, \varphi(a, x), z_2) \sigma_{i3} + (1 - \gamma_1) L_j(x, y, z_1, \varphi(b, y)) \sigma_{i4} \leq 0,$$

$$(1 + \gamma_2) L_i(x, y, z_1, \psi(b, y)) \sigma_{i4} + (1 - \gamma_2) L_j(x, y, \psi(a, x), z_2) \sigma_{j3} \geq 0;$$

10) выполняется условие 10 теоремы 1 и функции L_1^* и L_2^* строго монотонны по z_1 являются необходимыми и достаточными для существования решения $x(t)$ задачи (1), для которого верно (2).

Теорема 3. Пусть $\sigma_{14} L_1$ типа $(\pm 1, 1, 1, 1)$, $\sigma_{21} L_2$ типа $(1, 1, 0, -1)$, причем L_2 строго монотонна по последнему аргументу; тогда условия 1–3 и 5–8 теоремы 1 и условия

$$4) \quad \sigma_{14} L_1 \alpha \geq 0 \geq \sigma_{14} L_1 \beta, \quad \sigma_{21} L_2 \alpha \geq 0 \geq \sigma_{21} L_2 \beta,$$

9) по крайней мере для одной пары $i, j \in \{1, 2\}$ и $\forall (x, y, z_1, z_2) \in T$ выполняются неравенства

$$(1 + \gamma_1)L_1(x, y, \varphi(a, x), z_2)\sigma_{13} + (1 - \gamma_1)L_i(x, y, z_1, \varphi(b, y))\sigma_{i4} \leq 0,$$

$$(1 + \gamma_2)L_j(x, y, z_1, \psi(b, y))\sigma_{j4} + (1 - \gamma_2)L_1(x, y, \psi(a, x), z_2)\sigma_{13} \geq 0;$$

10) выполняется условие 10 теоремы 1 и функции L_1^* и L_2^* строго монотонны по z_2

являются необходимыми и достаточными для существования решения $x(t)$ задачи (1), для которого верно (2).

Теорема 4. Пусть $\sigma_{13}L_1$ типа $(\pm 1, 1, 1, 0)$, $\sigma_{21}L_2$ типа $(1, \pm 1, 0, -1)$; тогда условия 1–3 и 5–8 теоремы 1 и условия

$$4) \sigma_{13}L_1\alpha \geq 0 \geq \sigma_{13}L_1\beta, \quad \sigma_{21}L_2\alpha \geq 0 \geq \sigma_{21}L_2\beta,$$

$$9) (1 + \gamma_1)L_1(x, y, \varphi(a, x))\sigma_{13} + (1 - \gamma_1)L_2(x, y, \varphi(b, y))\sigma_{24} \leq 0,$$

$$(1 + \gamma_2)L_2(x, y, \psi(b, y))\sigma_{24} + (1 - \gamma_2)L_1(x, y, \psi(a, x))\sigma_{13} \geq 0$$

$$\forall x \in [\alpha(a), \beta(a)], \quad \forall y \in [\alpha(b), \beta(b)]$$

являются необходимыми и достаточными для существования решения $x(t)$ задачи (1), для которого верно (2).

Теорема 5. Пусть $\sigma_{11}L_1$ типа $(1, -1, 0, 0)$, $\alpha_{24}L_2$ типа $(\pm 1, \pm 1, -1, 1)$; тогда условия 1–3 и 5–8 теоремы 1 и условия

$$4) L_1\alpha = 0 = L_1\beta, \quad \sigma_{24}L_2\alpha \leq 0 \leq \sigma_{24}L_2\beta,$$

$$9) (1 + \gamma_1)L_2(x, y, \varphi(a, x), z_2)\sigma_{23} + (1 - \gamma_1)L_2(x, y, z_1, \varphi(b, y))\sigma_{24} \leq 0,$$

$$(1 + \gamma_2)L_2(x, y, z_1, \psi(b, y))\sigma_{24} + (1 - \gamma_2)L_2(x, y, \psi(a, x), z_2)\sigma_{23} \geq 0$$

$$\forall (x, y, z_1, z_2) \in T$$

являются необходимыми и достаточными для существования решения $x(t)$ задачи (1), для которого верно (2).

Вычислительный центр Латвийского
государственного университета
им. П. Стучки
Рига

Поступило
19 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. W. Knobloch, Math. Z., 82, 3, 177 (1963). ² K. W. Schrader, J. Diff. Equations, 5, 572 (1969). ³ А. Я. Лепин, Дифференциальные уравнения, 5, № 8, 1390 (1969).