

Г. В. ШОЛИН, Е. А. ОКС

ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком Е. К. Завойским 24 V 1972)

1. Измерение поляризации света внутри штарковского контура спектральной линии позволяет получить дополнительную информацию о спектре электростатических шумов в турбулентной плазме ⁽¹⁾. Эта дополнительная информация касается прежде всего диаграммы направленности турбулентных колебаний в излучающем объеме плазмы. В настоящей работе рассматривается влияние однородных, но анизотропных низкочастотных электростатических шумов на штарковские профили водородных линий. Действие этих шумов может быть описано в рамках квазистатического приближения ⁽²⁾. В основу поляризационной методики кладется общее свойство поляризации штарковских компонент в постоянном электрическом поле: преимущественная группировка вблизи центра линий циркулярно поляризованных σ -компонент и удаление в крыло линейно поляризованных в направлении поля π -компонент ⁽³⁾.

2. Пусть в установке с осью симметрии вдоль OZ ожидается появление турбулентных шумов. Естественно, что диаграмма направленности шумов должна обладать аксиальной симметрией, однако остаются неизвестными уровень турбулентности и характер анизотропии шумов. При двух положениях поляроида (1 — параллельно оси системы, 2 — перпендикулярно ей) регистрируются профили спектральной линии $S_1(x)$ и $S_2(x)$. Для того чтобы отчетливее выявить эффект анизотропии, исследуется разность $D(x) = S_1(x) - S_2(x)$ этих двух контуров (здесь $x = \lambda - \lambda_0$ — смещение от центра линии, в Å).

Пусть распределение низкочастотных электрических полей описывается аксиально-симметричной нормированной функцией $W(E, \cos \theta)$. Тогда в квазистатическом приближении профиль линии может быть представлен как

$$S_i(x) = \sum_{k, \nu} I_{k\nu} \int_{-\infty}^{\infty} M(u) du \int_0^{\infty} dE \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) W(E, \cos \theta) f_{i\nu}(\cos \theta) \delta(x - E\Delta_{k\nu} - ud); \quad (1)$$

здесь индекс $i = 1, 2$ соответствует положению поляроида, $\nu = \pi, \sigma$ отражает характер поляризации компоненты. Второе слагаемое в аргументе δ -функции представляет собой штарковский сдвиг, где $\Delta_{k\nu} = \frac{3ea_0\lambda_0^2}{4\pi\hbar c} \times [n(n_1 - n_2) - n'(n_1' - n_2')] -$ приведенная штарковская постоянная (a_0 — борковский радиус, n — главное, а n_1 и n_2 — электрические квантовые числа). Третье слагаемое — сдвиг, обусловленный эффектом Доплера, причем $d = \lambda_0 v_0 / c$ — доплеровская ширина ($v_0 = \sqrt{2T_a/M}$ — средний модуль тепловой скорости атомов в направлении луча зрения), $u = v_y / v_0$. Распределение атомов по скоростям $M(u)$ считается максвелловским.

Набор из четырех функций $f_{i\nu}(\cos \theta)$ выражает угловую зависимость наблюдаемой интенсивности штарковских компонент. Эти функции легко определить, рассматривая проекции на направление поляроида 1 или 2

излучающего диполя, либо ориентированного вдоль поля E (π -компонента), либо вращающегося в перпендикулярной к E плоскости (σ -компонента):

$$f_{1\pi} = 3 \cos^2 \theta, \quad f_{2\pi} = f_{1\sigma} = \frac{3}{2}(1 - \cos^2 \theta), \quad f_{2\sigma} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta). \quad (2)$$

Функции f_{ν} нормированы так, чтобы площади под контурами S_1 и S_2 были равны единице. При этом использовано общее свойство относительных интенсивностей $I_{k\nu}$ штарковских компонент ⁽³⁾: $\sum_k I_{k\pi} = \frac{1}{2} \sum_k I_{k\sigma} = \frac{1}{3}$.

В разностный контур $D(x)$ входят только линейные комбинации $f_{1\pi} - f_{2\pi} = \frac{3}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$, $f_{1\sigma} - f_{2\sigma} = \frac{3}{4}(1 - 3 \cos^2 \theta)$. Вводя обозначения $\tilde{I}_{k\pi} = 3I_{k\pi}$, $\tilde{I}_{k\sigma} = -\frac{3}{2}I_{k\sigma}$, можно опустить индекс ν при суммировании в формуле (1), поскольку здесь угловой множитель от ν не зависит:

$$D(x) = \sum_k \tilde{I}_k \int_0^\infty dE \int_{-\infty}^\infty du F(E) \cdot M(u) \cdot \delta(x - E\Delta_k - ud), \quad (3)$$

где

$$F(E) = \int_{-1}^{+1} W(E, \cos \theta) \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} d(\cos \theta). \quad (4)$$

3. В случае, когда доплеровское уширение мало по сравнению со штарковским сдвигом для всех боковых компонент, с точностью до членов второго порядка по параметру малости $\varepsilon = d / (E_{\text{ср}} \Delta_k)$ имеем

$$D(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{I}_k}{|\Delta_k|} F\left(\frac{x}{\Delta_k}\right) + \frac{\tilde{I}_0}{d} M\left(\frac{x}{d}\right) \int_0^\infty F(E) dE. \quad (5)$$

Этот контур, кроме узкой центральной части, представляет собой обычную картину штарковского уширения спектральной линии квазистатическими полями с той лишь разницей, что интенсивности штарковских компонент являются знакопеременными, а роль функции распределения полей $W(E)$ играет $F(E)$. Эта функция следующим образом изменяется с анизотропией шумов: при изотропном распределении $F(E) \equiv 0$, при диаграмме направленности полей, вытянутой вдоль оси системы, $F(E) > 0$, а при сплюснутой $F(E) < 0$.

Величина $S_F = \int_0^\infty F(E) dE$ зависит только от степени анизотропии $\eta = (E_z)_{\text{ср}} / (E_x)_{\text{ср}}$ и не зависит от масштаба полей; она монотонно возрастает от $-1/2$ при $\eta = 0$ до $+1$ при $\eta \rightarrow \infty$, принимая значение $S_F = 0$ при $\eta = 1$.

4. Для получения конкретных результатов необходимо сделать определенные предположения относительно $W(E, \cos \theta)$. Используем в качестве модели суперпозицию одномерного спектра шумов с волновым вектором вдоль оси системы и двумерного спектра с волновыми векторами в перпендикулярной плоскости. Каждый из этих спектров представляет собой результат сложения большого числа колебаний со случайными фазами. Поэтому распределение амплитуд в каждом из них будет выражаться соответствующими функциями Рэлея ⁽⁴⁾:

$$W_1(E_{\parallel}) dE_{\parallel} = (2\pi \langle E_{\parallel}^2 \rangle)^{-1/2} \exp\left(-\frac{E_{\parallel}^2}{2 \langle E_{\parallel}^2 \rangle}\right) \cdot dE_{\parallel},$$

$$W_2(E_{\perp}) dE_{\perp} = 2(\langle E_{\perp}^2 \rangle)^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{E_{\perp}^2}{\langle E_{\perp}^2 \rangle}\right) \cdot E_{\perp} dE_{\perp}.$$

Как правило, для эксперимента представляет интерес случай, когда средние поля $\langle E \rangle$ электростатических колебаний значительно больше сред-

них полей $E_0 = 2,6eN^{2/3}$, создаваемых отдельными ионами. В этом случае вклад отдельных частиц в распределение квазистатистических полей можно считать пренебрежимо малым, а распределение суммарного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ записать в виде

$$W(E, \cos \theta) dE d \cos \theta = \\ = \int d\mathbf{E}_{\parallel} \int d\mathbf{E}_{\perp} \cdot W_1(\mathbf{E}_{\parallel}) W_2(\mathbf{E}_{\perp}) \delta(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel} - \mathbf{E}_{\perp}) dE d(\cos \theta) = \\ = \left(\frac{2}{\pi \langle E_{\parallel}^2 \rangle} \right)^{1/2} \frac{E^2}{\langle E_{\perp}^2 \rangle} \exp \left\{ -\frac{E^2}{\langle E_{\perp}^2 \rangle} - \cos^2 \theta \left[\frac{E^2}{2 \langle E_{\parallel}^2 \rangle} - \frac{E^2}{\langle E_{\perp}^2 \rangle} \right] \right\} dE d(\cos \theta). \quad (6)$$

Диаграмма направленности, соответствующая распределению (6), — эллипсоид вращения с осью Z . При возрастании степени анизотропии $\eta = (\langle E_{\parallel}^2 \rangle / \langle E_{\perp}^2 \rangle)^{1/2}$ от 0 до ∞ этот эллипсоид меняется по форме от сильно сплюснутой «чечевицы» до очень вытянутой «сосиски», принимая при $\eta = 1$ форму сферы*.

В рамках этой модели функция $F(E)$, а следовательно, и разностный контур $D(x)$ могут быть выражены аналитически:

$$F(E) = \frac{(8\pi)^{-1/2} E^3}{E_z^2 E_x^2} \left\{ \Phi \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{E^2}{2} (E_x^2 - E_z^2) \right] - \right. \\ \left. - \Phi \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{E^2}{2} (E_x^2 - E_z^2) \right] \right\} e^{-E^2/(2E_x^2)}, \quad (7)$$

где $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Простой аналитический вид имеет также функция

$$S_F(\eta) = \frac{\eta^2 + 1/2}{\eta^2 - 1} - \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{|\eta^2 - 1|^{3/2}} \begin{cases} \arcsin \sqrt{1 - \eta^{-2}} & \text{при } \eta > 1 \\ \ln(\eta^{-1} + \sqrt{\eta^{-2} - 1})^{-1} & \text{при } \eta < 1 \end{cases}. \quad (8)$$

Типичный вид расчетного разностного контура для линий H_{α} и H_{β} приведен на рис. 1. Рисунок выполнен для распределения полей типа «сосиски».

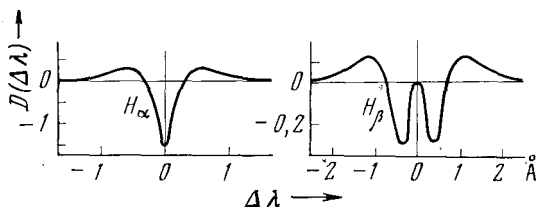


Рис. 1. Разностные контуры бальмеровских линий H_{α} и H_{β} при $E_z/E_x = 3$, $E_x \simeq 2$ кв/см; $d = 0,1$ Å

Для анизотропии противоположного знака (распределения типа «чечевицы») картина должна быть перевернута относительно оси абсцисс. Таким образом, по одному только виду разностного контура можно сразу качественно определить пространственную направленность шумов.

Площади S_D верхней и нижней частей контура $D(x)$ равны между собой и пропорциональны $S_F(\eta)$, т.е. зависят только от степени анизотропии. В силу различной степени удаления в крыло л-компоненты от сгруппированных в центре σ -компонент эти функции $S_D(\eta)$ для разных линий отличаются друг от друга, причем всегда $|S_D(\eta)| < |S_F(\eta)|$ (рис. 2).

Таким образом, зная из эксперимента нормированные поляризационные профили $S_1(x)$ и $S_2(x)$ бальмеровской линии (например, H_{α} или H_{β}), можно измерить площадь S_D какой-либо половины разностного контура $D(x)$ и по графику, приведенному на рис. 2, определить степень анизотропии η распределения шумов.

Разностный контур позволяет найти не только отношение E_z/E_x , но и каждое из этих полей в отдельности. Величину $E_{\max} = \max(E_z, E_x)$ можно

* Для упрощения записи будем обозначать ниже: $\langle E_{\parallel}^2 \rangle = E_z^2$, $1/2 \langle E_{\perp}^2 \rangle = E_x^2$.

оценить по положению дальнего экстремума x_{extr} разностного контура:

$$E_{\text{max}} \approx \frac{x_{\text{extr}}}{\Delta\pi}, \quad \Delta\pi^2 = \frac{\sum_k I_{k\pi}/\Delta_k^p}{\sum_k I_{k\pi}/\Delta_k^{p+2}}, \quad p = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta > 1, \\ 2 & \text{при } \eta < 1. \end{cases}$$

Более точно величину E_{max} можно определить по ходу интенсивности в крыле

$$D_{As}(x) \propto \begin{cases} \exp[-x^2/(2E_{\text{max}}^2\Delta\pi^2)], & D_{As}(x) > 0, \\ -x \exp[-x^2/(2E_{\text{max}}^2\Delta\pi^2)], & D_{As}(x) < 0. \end{cases}$$

5. В случае, когда доплеровское уширение превосходит штарковское, δ -функцию в формуле (3) можно разложить по параметру малости $\varepsilon^{-1} \ll 1$

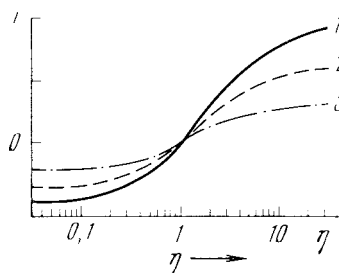


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость универсальной функции S_F и функции S_D для линий H_α и H_β от степени анизотропии η (1 — S_F ; 2 — S_D для H_α ; 3 — S_D для H_β)

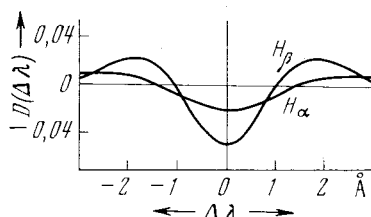


Рис. 3

Рис. 3. Разностные контуры при $E_z/E_x = 3$, $E_x \approx 2$ кв/см и температуре излучающих атомов $T_a \approx 300$ эв

и, учитывая, что $\tilde{I}_{-k} = +\tilde{I}_k$, $\Delta_{-k} = -\Delta_k$ и $\sum_k \tilde{I}_k = 0$, с точностью до членов четвертого порядка по ε^{-1} , получить

$$D(x) = \left(\frac{2x^2}{d^2} - 1 \right) \frac{e^{-x^2/d^2}}{2d\sqrt{\pi}} \left[\sum_k \tilde{I}_k \frac{\Delta_k^2}{d^2} \cdot \int_0^\infty F(E) E^2 dE \right]. \quad (9)$$

Типичный вид такого разностного контура для линий H_α и H_β приведен на рис. 3. Рисунок выполнен для распределения полей типа «сосиски». В случае «чечевицы» этот контур должен быть повернут относительно оси абсцисс. Таким образом, возможность качественного определения характера анизотропии шумов сохраняется и при $\varepsilon \gg 1$. При не слишком малой анизотропии по вертикальному масштабу контура $D(x)$ можно также определить величину $\int_0^\infty F(E) E^2 dE = E_z^2 - E_x^2$ и, тем самым, E_{max} .

Доплеровское уширение все же уменьшает количество информации в поляризационном контуре при $\varepsilon \gg 1$, поскольку $D(x)$ оказывается величиной $\sim \varepsilon^{-2}$ по сравнению с $S(x)$. На эксперименте разумнее переходить в этом случае к более высоким членам серии, у которых благодаря быстрому росту штарковской постоянной ($\Delta \sim n^2$) и уменьшению d параметр ε может быть сделан меньше единицы.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Е. К. Завойскому за постоянный интерес и внимание к настоящей работе, а также В. А. Скорюпину и В. В. Шапкину за полезные дискуссии.

Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
1 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. К. Завойский, Ю. Г. Калинин и др., Письма ЖЭТФ, **13**, 49 (1971).
² Г. В. Шолин, ДАН, **195**, 589 (1970). ³ J. Stark, Handb. Experimentalphysik, **21**, 399 (1927). ⁴ Рэлей, Теория звука, **1**, М., 1955.