

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

В. Г. ШЕРЕТОВ

ФУНКЦИОНАЛЫ ТИПА ДИРИХЛЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 VI 1972)

1. В работе ⁽¹⁾ рассмотрена задача о минимуме функционала Дирихле — Дугласа

$$D_{\rho}(f) = \iint_{S_0} (|w_z|^2 + |w_{\bar{z}}|^2) \rho(w(z)) dx dy$$

в заданном гомотопическом классе α квазиконформных в среднем гомеоморфизмов f одной компактной римановой поверхности (р.п.) S_0 на другую — S при условии, что $\rho(w)|dw|^2$ — положительная, исключая изолированные нули, непрерывная конформная метрика на р.п. S . Здесь и ниже $x + iy = z$, $u + iv = w$, $w(z)$ — локальное представление гомеоморфизма f .

При некоторых дополнительных предположениях доказано, что экстремаль f_0 функционала $D_{\rho}(f)$ существует и является гармоническим относительно метрики $\rho(w)|dw|^2$ отображением, т. е. выражение $\rho(w_0(z))w_{0z}\bar{w}_{0\bar{z}}dz^2$ определяет на р.п. S_0 голоморфный квадратичный дифференциал. Известно ⁽¹³⁾, что гармонические отображения обобщают экстремальные отображения Тейхмюллера ^(1, 2) и совпадают с ними, если метрика $\rho(w)|dw|^2$ имеет вид $|\psi(w)| \cdot |dw|^2$, где $\psi(w)dw^2$ — голоморфный дифференциал на р.п. S . С другой стороны, гармонические отображения связаны с теорией минимальных поверхностей ^(7, 14).

2. Пусть $\rho(w)|dw|^2$ — инвариант на компактной р.п. S , для которого выполняются условия:

- а) $0 \leq \rho(w) \leq R = \text{const}$ почти всюду; б) $\iint_S \rho(w) du dv = 1$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В гомотопическом классе α_k сохраняющих ориентацию k -квазиконформных гомеоморфизмов f компактной р.п. S_0 на р.п. S найти отображение, минимизирующее функционал $D_{\rho}(f)$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. В классе α_k существует (вообще говоря, не единственный) гомеоморфизм f_0 с локальным представлением $w_0(z)$, минимизирующий функционал $D_{\rho}(f)$. Если при этом f_0 не является конформным, то выражение $\rho(w_0(z))w_{0z}\bar{w}_{0\bar{z}}dz^2$ является ограничением на множество $E_0 = \{z \in S_0; \rho(w_0(z))\mu_0(z) \neq 0\}$ голоморфного квадратичного дифференциала $\varphi_0(z)dz^2$ на р.п. S_0 ; здесь $\mu_0(z) = w_{0\bar{z}}/w_{0z}$ — комплексная характеристика (дилатация) отображения f_0 .

3. В работе ⁽⁸⁾ автор рассмотрел экстремальные квазиконформные отображения типа Тейхмюллера, дилатация которых имеет вид $\mu(z) = \sigma(z)\varphi(z)/|\varphi(z)|$, где $\varphi(z)dz^2$ — голоморфный дифференциал на р.п. S_0 и почти всюду $0 \leq \sigma(z) \leq k = \text{const}$.

Отображения типа Тейхмюллера минимизируют в классе α_k функционал $\tau(f) = \text{grai max} |\sigma^{-1}(z) \cdot \mu_f(z)|$. Между гармоническими отображениями и отображениями типа Тейхмюллера имеется связь, которая фиксируется следующей теоремой.

Теорема 2. Гармоническое квазиконформное отображение $f_0 \in \alpha_k$ является отображением типа Тейхмюллера, причем $\sigma(z) = |\varphi_\rho(z)| / |\rho(w_0(z))| |w_{0z}|^2$, $\varphi_\rho(z) dz^2$ — ассоциированный с f_0 дифференциал.

Обратно, отображение f_0 типа Тейхмюллера с дилатацией $\mu_0(z) = \sigma(z) \overline{\varphi(z)} / |\varphi(z)|$ является обобщенным гармоническим отображением относительно инварианта

$$\rho(w) |dw|^2 = \begin{cases} \frac{|\varphi(z_0(w))| |z_{0w}|^2 - |\frac{z}{0w}|^2|^2}{\sigma(z_0(w)) \cdot |z_{0w}|^2} |dw|^2, & \text{если } \sigma(z_0(w)) \neq 0; \\ 0, & \text{если } \sigma(z_0(w)) = 0. \end{cases}$$

В теореме 2 $z_0(w)$ — локальное представление обратного отображения f_0^{-1} , а под обобщенным гармоническим понимается экстремальное отображение, существование которого утверждается в теореме 1.

Доказательство теоремы 2 состоит в непосредственной проверке.

4. Наметим основные моменты доказательства теоремы 1. Представим р.п. S_0 и S фуксовыми группами Γ_0 и Γ , действующими в круге $U: |z| < 1$, и сохраним для инвариантных относительно этих групп объектов на $U|_{\Gamma_0}$ и $U|_{\Gamma}$ те же обозначения, что и для соответствующих им объектов на S_0 и S . Пусть P_0 — метрический фундаментальный многоугольник группы Γ_0 . Рассмотрим минимизирующую последовательность $w_n(z): U|_{\Gamma_0} \rightarrow U|_{\Gamma}$ k -квазиконформных автоморфизмов (гомеоморфизмов на себя) круга $\bar{U}$, нормированных условиями: $w_n(0) = 0$, $w_n(1) = 1$.

В силу компактности нормированного семейства k -квазиконформных автоморфизмов круга $\bar{U}$ в равномерной норме ⁽²⁾, можно считать, что $w_n(z) \Rightarrow w_0(z)$.

Экстремальное свойство гомеоморфизма $w_0(z)$ следует из полунепрерывности функционала $D_\rho(f)$:

$$D_\rho(w_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_\rho(w_n),$$

которая устанавливается аналогично ⁽²⁾ с использованием слабой сходимости обобщенных производных w_{nz} и w_{nz} ⁽¹¹⁾.

5. Второе утверждение теоремы 1 доказывается методом вариаций ^(3, 5). Будем понимать под $L(\sigma; E_0)$ банахово пространство, образованное суммируемыми с весом $\sigma(z) = |\mu_0(z)|$ функциями $\psi(z)$ на множестве $E_0 = \{z \in P_0; \rho(w_0(z)) \cdot \mu_0(z) \neq 0\}$ с нормой $\|\psi\| = \iint_{E_0} |\psi(z)| \sigma(z) dx dy$.

Допуская от противного, что отображение $w_0(z)$ не является конформным, множество E_0 имеет положительную меру Лебега и функция $\varphi_\rho(z) = \rho(w_0(z)) \cdot n_{0z} \cdot \bar{w}_{0z} \in L(\sigma; E_0)$ не является голоморфной на E_0 , определим, пользуясь теоремой Хана — Банаха ⁽⁴⁾, линейный ограниченный функционал $m(\psi)$ на $L(\sigma; E_0)$, удовлетворяющий условиям

а) $m(\varphi) = \iint_{E_0} \mu_0(z) \cdot \varphi(z) dx dy$ для любого элемента $\varphi(z)$ из подпространства $A(\sigma; E_0)$ в $L(\sigma; E_0)$, образованного ограничениями на множестве E_0 голоморфных квадратичных дифференциалов на р.п. $U|_{\Gamma_0}$;

б) $m(\varphi_\rho) = 0$;

в) $\|m(\psi)\| = \sup \left\{ \left| \iint_{E_0} \mu_0(z) \varphi(z) dx dy \right|; \|\varphi\| = 1, \varphi \in A(\sigma; E_0) \right\}$.

Для функционала $m(\psi)$ имеем представление

$$m(\psi) = \iint_{E_0} m(z) \psi(z) dx dy,$$

причем

$$\text{vrai max } \{\sigma^{-1}(z) \cdot |m(z)|; z \in E_0\} = q < 1.$$

Дифференциал Бельтрами

$$v(z) \frac{d\bar{z}}{dz} = \begin{cases} [\mu_0(z) - m(z)] d\bar{z}/dz, & \text{если } z \in E_0; \\ 0, & \text{если } z \in P_0 \setminus E_0, \end{cases} \quad (1)$$

определяет тривиальную ^(7, 10) вариацию поверхности $U|_{\Gamma_0}$:

$$z = H(z; \varepsilon) = z + \varepsilon h(z) + O(\varepsilon^2), \quad (2)$$

$\varepsilon > 0$ — малый параметр. Следуя далее схеме доказательства, опубликованного в ⁽⁹⁾, покажем, что комплексная характеристика $\mu_\varepsilon(z)$ проварьированного отображения $w_\varepsilon(z)$ удовлетворяет условию $|\mu_\varepsilon(z)| \leq \sigma(z) \times [1 - O(\varepsilon)]$, так что вариация $H(z; \varepsilon)$ является допустимой.

6. Вычислим первую вариацию функционала $D_\rho(w)$. Дифференциальная форма

$$\alpha = p(z) dz + q(z) d\bar{z} = \sqrt{\rho(w_0(z))} (w_{0z} dz + w_{0\bar{z}} d\bar{z})$$

при вариации $z' = H^{-1}(z; \varepsilon)$ преобразуется к виду

$$\alpha = \left[p' \frac{\partial z'}{\partial z} + q' \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} \right] dz + \left[p' \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} + q' \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{z},$$

где

$$\begin{aligned} p'(z'(z)) &= p(z) - \varepsilon [p(z) \bar{h}_z - q(z) \bar{h}_{\bar{z}} - 2p(z) \operatorname{Re} h_z] + O(\varepsilon^2), \\ q'(z'(z)) &= q(z) - \varepsilon [q(z) h_z - p(z) h_{\bar{z}} - 2q(z) \operatorname{Re} h_{\bar{z}}] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\delta D_\rho(w_0) = -4 \operatorname{Re} \iint_{P_0} p(z) \overline{q(z)} h_{\bar{z}} dx dy. \quad (3)$$

В силу нормировки

$$\iint_{P_0} \rho(w_0(z)) [|w_{0z}|^2 - |w_{0\bar{z}}|^2] dx dy = 1,$$

и поэтому

$$D_\rho(w_0) = 1 + 2 \iint_{P_0} \rho(w_0(z)) \cdot |w_{0\bar{z}}|^2 dx dy = 1 + 2\mu_0(\varphi_\rho).$$

Принимая во внимание формулы (1) — (3), находим

$$\delta D_\rho(w_0) = -4 \operatorname{Re} \iint_{P_0} v(z) \varphi_\rho(z) dx dy = -4 [\mu_0(\varphi_\rho) - m(\varphi_\rho)] < 0.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Пользуясь методом покрывающих Альфорса ⁽²⁾, можно распространить полученные результаты на случай компактной римановой поверхности рода I и конечных римановых поверхностей.

Поступило
23 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969.
- ² Л. Альфорс, Л. Берс, Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, М., 1961. ³ П. П. Белинский, Сибирск. матем. журн., 1, № 3, 303 (1960). ⁴ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. ⁵ С. Л. Крушкаль, ДАН, 171, № 4 (1966). ⁶ С. Л. Крушкаль, Сибирск. матем. журн., 8, № 2, 313 (1967). ⁷ Р. Курант, Принципы Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953. ⁸ В. Г. Шеретов, ДАН, 179, № 5 (1968). ⁹ В. Г. Шеретов, В. В. Думкин, Матем. заметки, 7, № 5, 605 (1970). ¹⁰ L. V. Ahlfors, Ann. Math., 74, № 1, 171 (1961). ¹¹ L. Bers, Comm. math. Helv., 37, 148 (1962). ¹² M. Gerstenhaber, H. E. Rauch, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 40, 808 (1954). ¹³ Y. Miyahara, Trav. Roy. Univ., Math., 4, 36 (1968). ¹⁴ K. Shibata, Osaka Math. J. 15, 173 (1963).