

Б. М. ГУРЕВИЧ

ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ И ДВУСТОРОННЕЙ РЕГУЛЯРНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VIII 1972)

1. Мы будем рассматривать стационарный процесс $\{X_t, t \in \Theta\}$, где $\Theta = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}^1$, как семейство случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Введем σ -алгебру $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, порожденную всеми величинами $X_s, s \in \Theta$, и для каждого $t \in \Theta$ обозначим $\mathfrak{B}_t^+, \mathfrak{B}_t^-, \mathfrak{B}_t^\pm$ σ -алгебры, порожденные величинами X_s соответственно при $s \geq t, s \leq t$ и $|s| \geq |t|$. Положим

$$\mathfrak{B}^+ = \bigcap_t \mathfrak{B}_t^+, \quad \mathfrak{B}^- = \bigcap_t \mathfrak{B}_t^-, \quad \mathfrak{B}^\pm = \bigcap_t \mathfrak{B}_t^\pm.$$

Пусть $\mathfrak{K}$ — тривиальная σ -алгебра, образованная событиями вероятности 0 и 1. Следуя А. Н. Колмогорову, назовем процесс X_t положительно регулярным, отрицательно регулярным или двусторонне регулярным, если соответственно $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}^- = \mathfrak{K}$ или $\mathfrak{B}^\pm = \mathfrak{K}$. Свойства, противоположные регулярности, характеризуются соотношениями $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^- = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^\pm = \mathfrak{B}$. При выполнении этих соотношений будем называть процесс X_t соответственно положительно сингулярным, отрицательно сингулярным или двусторонне сингулярным.

Двусторонняя регулярность, очевидно, влечет за собой как положительную, так и отрицательную регулярность. Примеры показывают, что последние два свойства, вообще говоря, не эквивалентны: существуют стационарные процессы, которые отрицательно регулярны, но положительно сингулярны, и наоборот. Примеры такого рода в случае дискретного времени и бесконечного (счетного) множества состояний построены В. Парри ⁽¹⁾, а в случае непрерывного времени и конечного множества состояний — У. Кренгелем ⁽²⁾. Однако в классе процессов с дискретным временем и конечным множеством состояний, как установили В. А. Рохлин и Я. Г. Синай ⁽³⁾, подобные примеры отсутствуют. Возникает вопрос, не обладает ли всякая регулярная стационарная последовательность с конечным множеством состояний также и свойством двусторонней регулярности. Этот вопрос, формулировавшийся разными авторами (см., например, ⁽⁴⁾), пользуется в последнее время особым вниманием в связи с некоторыми задачами теории колец операторов и статистической физики (см. ⁽⁵⁾).

Ниже будет построен пример стационарной последовательности с конечным числом состояний, которая односторонне регулярна, но двусторонне сингулярна. Тем самым ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным.

2. Мы будем пользоваться некоторыми результатами работы ⁽⁶⁾ (см. пример 5.2 из этой работы), в которой содержатся также все необходимые для дальнейшего определения и факты из эргодической теории.

Сначала опишем в самых общих чертах конструкцию искомого процесса. Пусть $\{S_t\}$ — измеримый поток, определенный в пространстве Лебега Ω и являющийся K -потокком. По любому конечному разбиению $\gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r)$ пространства Ω и любому автоморфизму $S_\tau, \tau > 0$, входящему в по-

ток, можно построить стационарную последовательность $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, положив $X_n(\omega) = i$, если $S_\tau^n \omega \in \Gamma_i$, $\omega \in \Omega$. Любое K -разбиение для потока $\{S_t\}$ служит K -разбиением и для S_τ . Поэтому S_τ есть K -автоморфизм, откуда следует односторонняя регулярность последовательности X_n . Ее двусторонняя сингулярность эквивалентна соотношению *

$$\bigwedge_{k>0} \bigvee_{|n| \geq k} S_\tau^n \gamma = \varepsilon,$$

где ε — разбиение пространства Ω на отдельные точки. Для доказательства этого соотношения достаточно проверить, что при любом $k > 0$

$$\bigvee_{n \geq k} S_\tau^{-n} \gamma \bigvee \bigvee_{n \geq 0} S_\tau^n \gamma = \varepsilon. \quad (*)$$

Перейдем к конкретному построению потока $\{S_t\}$ и разбиения γ . Пусть T — автоморфизм Бернулли с двумя состояниями и вероятностями $1/2, 1/2$, реализованный как преобразование пекаря. Это означает, что T преобразует квадрат $W = \{w = (x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ с мерой Лебега по формуле

$$Tw = T(x, y) = \begin{cases} (2x, 1/2 y), & \text{если } x \leq 1/2, \\ (2x - 1, 1/2 y + 1/2), & \text{если } x > 1/2. \end{cases}$$

Рассмотрим специальный поток $\{S_t\} = (T, f)$, построенный по автоморфизму T и функции

$$f(w) = f(x, y) = \begin{cases} ax + b & \text{при } x \leq 1/2, \\ cx + d & \text{при } x > 1/2. \end{cases}$$

При $b > 0, a + 2b > 0, c + d > 0, a - c = 2(d - b)$ эта функция положительна и непрерывна. Поток $\{S_t\}$ действует в пространстве

$$\Omega = \{\omega = (x, y, z) = (w, z): w \in W, 0 \leq z < f(w)\}.$$

По своему характеру он очень близок к Y -потокам (см. (7)), а разбиение ξ пространства Ω на отрезки вида $x = \text{const}, z = \text{const}$ аналогично разбиению пространства, в котором определен Y -поток, на отрезки слоев одномерного сжимающегося слоения. В (6) показано, что если $a \neq c$, то ξ служит K -разбиением для потока $\{S_t\}$ **.

Построим теперь другое разбиение пространства Ω , аналогичное разбиению на отрезки расширяющихся слоев в случае Y -потока. Элементы этого разбиения, которое мы обозначим η , образуются в результате пересечения с Ω всевозможных прямых вида

$$y = \bar{y}, \quad z = [(a - c)\bar{y} - a]x + \bar{z},$$

где $\bar{y}$ и $\bar{z}$ — константы.

Для дальнейшего удобно предположить, что числа b и d положительны и достаточно велики по сравнению с $|a|$ и $|c|$. В таком случае при некоторых $u \in \mathbb{R}^1$ и $\delta > 0$ графики функций

$$\varphi(w) = \varphi(x, y) = [(a - c)y - a](x - 1/2) + u, \quad \omega = (x, y) \in W,$$

$\varphi(w) + 2\delta$ и $\varphi(w) - 2\delta$ принадлежат множеству Ω и состоят из целых элементов разбиения η .

Разобьем Ω на 3 множества ненулевой меры, также состоящие из целых элементов η :

$$D_1 = \{(w, z): z < \varphi(w) - \delta\}, \quad D_2 = \{(w, z): \varphi(w) - \delta \leq z \leq \varphi(w) + \delta\},$$

$$D_3 = \{(w, z): z > \varphi(w) + \delta\}.$$

* Все соотношения между разбиениями понимаются по модулю 0 (mod 0).

** Можно показать, что при $\tau \neq 0$ автоморфизм S_τ изоморфен бернуллиевскому.

Каждое из D_i , $i = 1, 2, 3$, разобьем на две части, отнеся к одной из них точки (x, y, z) с $y < 1/2$, а к другой — точки (x, y, z) с $y \geq 1/2$. Полученное разбиение пространства Ω на 6 множеств обозначим α .

Построим еще разбиение β на 4 множества, определяемые соответственно условиями $x < 1/2$, $z < \min_w f(w) / 2$ и аналогичными неравенствами с остальными тремя комбинациями знаков $<$ и $\geq$.

Пусть $\gamma = \alpha \vee \beta$ и τ — положительное число, не превосходящее минимального из чисел δ , $\min_w f(w) / 2$.

3. Мы докажем соотношение (*), опираясь на следующие факты, первые четыре из которых вытекают непосредственно из определений.

1°) Под действием потока $\{S_t\}$ все точки, принадлежащие одному элементу разбиения ξ , совершают скачки в одни и те же моменты времени (мы говорим, что точка $\omega \in \Omega$ совершает скачок в момент t , если $S_t \omega$ имеет вид $(x, y, 0)$).

2°) Всякий элемент разбиения $S_t \xi$ при $t < 0$ состоит из одного или нескольких элементов разбиения ξ , т. е. отрезков вида $x = \text{const}$, $z = \text{const}$.

3°) Если два элемента разбиения η лежат на параллельных прямых, то они находятся в одной плоскости вида $y = \text{const}$.

4°) Под действием потока $\{S_{-t}\}$ все точки, принадлежащие одному элементу разбиения η , одновременно попадают в множество D_2 , оказываясь при этом снова в одном элементе η .

$$5^0) \eta \leq \bigvee_{n \geq 0} S_{\tau^n} \alpha, \xi = \bigvee_{n \geq 0} S_{\tau^{-n}} \beta.$$

Соотношения 5°) доказываются почти одинаково и довольно просто. В рассуждениях используется кроме определений лишь эргодичность автоморфизмов S_{τ} , $S_{\tau^{-1}}$.

$$6^0) \text{ При любом } t \geq 0 \quad \eta \vee S_{-t} \xi = \varepsilon.$$

Для доказательства рассмотрим произвольный элемент C_0 разбиения ξ и любые два элемента C_1 и C_2 того же разбиения, входящие в $S_{-t} C_0$ (см. п. 2°)). Пусть отрезок C_i , $i = 0, 1, 2$, определяется уравнениями $x = x_i$, $z = z_i$. Если под действием потока за время t отрезок C_1 совершает n_1 скачков, а отрезок C_2 совершает n_2 скачков, то

$$x_1 = (x_0 + l_1) / 2^{n_1}, \quad x_2 = (x_0 + l_2) / 2^{n_2},$$

где l_1, l_2 — целые числа и $0 \leq l_1 < 2^{n_1}$, $0 \leq l_2 < 2^{n_2}$. Кроме того, для любых точек $(w_1, z_1) \in C_1$ и $(w_2, z_2) \in C_2$

$$-z_1 + \sum_{i=0}^{n_1-1} f(T^i w_1) + z_0 = -z_2 + \sum_{i=0}^{n_2-1} f(T^i w_2) + z_0 = t$$

и, следовательно, угловой коэффициент $\kappa = (z_2 - z_1) / (x_2 - x_1)$ равен

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \left[\sum_{i=0}^{n_2-1} f(T^i w_2) - \sum_{i=0}^{n_1-1} f(T^i w_1) \right].$$

После подстановки значений функции f последнее выражение примет вид $(Ax_0 + B) / (\bar{A}x_0 + \bar{B})$, где коэффициенты $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ однозначно определяются по n_1, n_2, l_1, l_2 . При фиксированном t каждое из этих чисел может принимать лишь конечное множество значений. Поэтому для всевозможных отрезков C_0, C_1 и C_2 угловой коэффициент κ выражается через x_0 с помощью конечного числа дробно-линейных функций. Некоторые из этих функций могут быть константами. Обозначим их $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ и выкинем из пространства Ω все элементы разбиения η , лежащие на прямых вида $y = \text{const}$, $z = \kappa_i x + \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Из 3°) видно, что выкинутое мно-

жество образовано конечным числом прямоугольников и, значит, имеет нулевую меру. Так как дробно-линейная функция, не сводящаяся к константе, принимает каждое свое значение в единственной точке, для любого не выкинутого элемента C' разбиения η существует такое конечное множество $X(C') \subset [0, 1]$, что C' может пересекаться более чем в одной точке лишь с теми элементами разбиения $S_{-i}\xi$, которые имеют вид $S_{-i}C_0$, где

$$C_0 = \{(x, y, z) \in \Omega: x = x_0, z = z_0\}, x_0 \in X(C').$$

Из сказанного вытекает, что объединение элементов разбиения $S_{-i}\xi$, пересекающихся с данным C' в двух и более точках, проектируется на плоскость $z = 0$ в конечное число отрезков вида $x = \text{const}$ и, следовательно, пересекается с C' в конечном числе точек. Таким образом, $S_{-i}\xi$ индуцирует на C' , с точностью до множества условной меры 0, разбиение на точки. Тем самым утверждение 6^o) доказано.

Требуемое соотношение (*) моментально доказывается при сопоставлении пунктов 5^o), 6^o).

З а м е ч а н и е. Из построения, описанного в п. 2, видно, что разбиение γ содержит 24 элемента. Слегка изменив конструкцию, можно сократить число его элементов до двух и тем самым получить пример стационарной случайной последовательности с двумя состояниями, обладающей свойствами односторонней регулярности и двусторонней сингулярности.

Простой пример стационарной последовательности с аналогичными свойствами, но несчетным множеством состояний приведен в (4). Известные результаты (см. (8-10)) показывают, что подобные примеры можно найти и среди гауссовских последовательностей. Я благодарен акад. А. Н. Колмогорову, обратившему мое внимание на последнее обстоятельство.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Пэрри, ДАН, 173, № 2 (1967). ² U. Krengel, J. Math. Anal. and Appl., 35, № 3 (1971). ³ В. А. Рохлин, Я. Г. Синай, ДАН, 141, № 5 (1961). ⁴ R. Olsen, Zs. Wahr. u. verw. Geb., 18, № 2 (1971). ⁵ O. Lanford, D. Ruelle, Comm. Math. Phys., 13, № 3 (1969). ⁶ Б. М. Гуревич, Тр. Московск. матем. общ., 17 (1967). ⁷ Д. В. Аносов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 90 (1967). ⁸ А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 1 (1941). ⁹ А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 2, № 6 (1941). ¹⁰ А. М. Яглом, УМН, 4, № 4 (1949).