

УДК 517.535

МАТЕМАТИКА

С. И. ИБРАГИМОВ

О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 31 VIII 1972)

Обозначим через $K(r, R)$ кольцо $r < |z| < R$, а через $A(K)$ — пространство функций, аналитических в кольце $K(r, R)$.

Система функций $\{\varphi_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\varphi_n(z) \in K(r, R)$, называется *полной* в кольце $K(r, R)$, если любая из функций $f(z) \in A(K)$ может быть приближена с любой наперед заданной степенью точности линейной комбинацией функций данной системы $\{\varphi_n(z)\}$, т. е. имеем

$$\inf_{(\lambda)} \max_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{j=-n}^n \lambda_j \varphi_j(z) \right| = 0.$$

Известно, что любую функцию $f(z) \in A(K)$ можно единственным образом представить в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Это свидетельствует о том, что система функций $\{z^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ образует базис и, следовательно, полна в любом конечном кольце $K(r, R)$.

Пусть $\{\varphi_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\psi_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — две системы функций, аналитических в кольце $K(r, R)$, причем первая из этих систем полна в данном кольце $K(r, R)$. В дальнейшем мы воспользуемся следующим критерием полноты: если каждая функция системы $\{\varphi_n(z)\}$ может быть приближена с любой наперед заданной степенью точности линейной комбинацией функций $\{\psi_n(z)\}$, т. е.

$$\inf_{(\lambda)} \max_{z \in \bar{K}} \left| \varphi_n(z) - \sum_{j=-p_n}^{p_n} \lambda_{j,n} \psi_j(z) \right| = 0,$$

то система $\{\psi_n(z)\}$ также полна в кольце $K(r, R)$.

Теорема 1. Пусть функция $F(z, u)$ определяется как

$$F(z, u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(z) u^n \quad (1)$$

при условии, что ряд (1) сходится равномерно по каждому переменному в кольце $K(r, R)$, где $r < 1$, $R > 1$, при любом фиксированном значении другого переменного также из кольца $K(r, R)$. Кроме того заданная система $\{\varphi_n(z)\}$, $\varphi_n(z) \in A(K)$, полна в кольце $K(r, R)$.

Тогда для полноты системы функций

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \psi_n(t) F(z, t) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

в кольце $K(r, R)$ необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_n(z)\}$, $\varphi_n(z) \in A(K)$, была *полной* в кольце $K(r, R)$.

Доказательство. В силу единственности ряда Лорана, ряд (1) будет рядом Лорана функции $F(z, u)$ по переменному u при фиксирован-

ном z и имеют место формулы

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t^{n+1}} F(z, t) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

причем удобно полагать, что γ — единичная окружность $|t| = 1$.

Пусть система функций $\{\Phi_n(z)\}$, $\Phi_n(z) \in A(K)$, полна в кольце $K(r, R)$. В силу аналитичности функций $\psi_n(t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, на окружности $|t| = 1$ и в силу полноты системы t^n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, во всем кольце $K(r, R)$, при $|t| = 1$ имеем

$$\psi_n(t) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} A_{n,k} t^{k+1} + \varepsilon_{m_n}(t).$$

Подставив выражение $\psi_n(t)$ в формулу (1) и имея в виду (3), получим равенство

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} A_{n,k} \varphi_k(z) + \delta_{m_n}, \quad (4)$$

где $|\delta_{m_n}| < \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Из равенства (4) следует, что система функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна в том же кольце $K(r, R)$, в котором полна система $\{\Phi_n(z)\}$. Необходимость доказана.

Предположим теперь, что система $\{\varphi_n(z)\}$ полна в кольце $K(r, R)$. В силу аналитичности t^n , $n = 0, \pm 1, \dots$, на окружности $|t| = 1$ и в силу полноты системы $\{\psi_n(z)\}$ во всем кольце $K(r, R)$, имеем

$$\frac{1}{t^{n+1}} = \sum_{k=-p_n}^{p_n} B_{n,k} \psi_k(t) + \varepsilon_{p_n}(t).$$

Подставив выражение t^n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в формулу (3) и имея в виду равенство (2), получим

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=-p_n}^{p_n} B_{n,k} \Phi_k(z) + \delta_{p_n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при любом z из кольца $K(r, R)$, где $|\delta_{p_n}| < \varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малое число. Последнее показывает, что система $\{\varphi_n(z)\}$ полна там, где полна система $\{\Phi_k(z)\}$. Достаточность также доказана. Рассмотрим несколько частных случаев:

1) Пусть $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — подпоследовательность целых чисел такая, что $\varphi_{v_n}(z) \equiv 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Положим $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{n\}_{n=-\infty}^{\infty} \setminus \{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. В этом случае можно говорить о полноте системы функций $\{\Phi_n(z)\}$ в некоторой области (D) , являющейся частью кольца $K(r, R)$, т. е. справедливо

Следствие 1. Если функция $F(z, u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda_n}(z) u^{\lambda_n}$ аналитическая по каждому переменному в кольце $K(r, R)$, то для полноты системы $\{\Phi_n(z)\}$ в области $D \in K(r, R)$ необходима и достаточна полнота системы $\{\varphi_{\lambda_n}(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в той же области $D \subset K(r, R)$.

2) Пусть функция $F(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) u^n$ аналитическая по u в круге $|u| < R$ при каждом z из кольца $K(r, R)$. В этом случае из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Если $F(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) u^n$ — аналитическая функция по u в круге $|u| < R$ и аналитическая по z в кольце $K(r, R)$, то для полноты системы функций $\{\varphi_n(z)\}$ в кольце $K(r, R)$ необходима и достаточно полнота системы $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в том же кольце $K(r, R)$.

3) Положим $\psi_n(z) = \frac{1}{(z - \alpha_n)}$, где $|\alpha_n| < 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$ расходится. Известно, что система функций $\left\{ \frac{1}{z - \alpha_n} \right\}$ полна в области $|z| \geq 1$ (см. (1), стр. 277–280). В этом случае из равенства (2) находим $\Phi_n(z) = F(z, \alpha_n)$, $n = 0, 1, \dots$, и из теоремы 1 вытекает

Следствие 3. Пусть $F(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) u^n$ — аналитическая функция по каждому из переменных u, z в круге $|u| < R$ при фиксированном значении другого переменного. Для полноты системы функций $\{F(z, \alpha_n)\}$ в круге $|z| < R$ или в некоторой области (D) , принадлежащей кругу $|z| < R$, необходима и достаточно полнота системы функций $\{\varphi_n(z)\}$ в круге $|z| < R$ или в той же области (D) .

Это утверждение является обобщением и уточнением теоремы И. И. Ибрагимова (2), где доказана достаточность условия.

4) Пусть теперь функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ из пространства $A(K)$ такова, что $c_n \neq 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Положим, что $\varphi_n(z) = c_n z^n$. В этом случае $F(z, u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (zu)^n = f(zu)$ и справедливо

Следствие 4. Пусть система функций $\{\psi_n(z)\}$ полна в кольце $K(r, R)$ и $f(z) \in A(K)$. Тогда для полноты системы функций

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \psi_n(t) f(zt) dt, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

в кольце $K(r, R)$ необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Лорана функции $f(z)$ были отличны от нуля.

В частности, пусть $\{v_n\}$ — некоторая подпоследовательность целых чисел и функция $f(z) \in A(K)$ такова, что $c_{v_n} = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом случае также можно говорить о полноте системы функций $\{\Phi_n^*(z)\}$ в некоторой области (D) , являющейся частью кольца $K(r, R)$, т. е. справедливо

Следствие 5. Если функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, где $c_{v_n} = 0$, $n = 0, \pm 1, \dots$, и $\{\lambda_n\} = \{n\} \setminus \{v_n\}$ принадлежит пространству $A(K)$, то для полноты системы функций $\{\Phi_n^*(z)\}$ в области $(D) \subset K$ необходима и достаточно полнота системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в той же области D .

В частности, положим, что $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < R$, т. е. $c_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$. Положим, что $f(z)$ такова, что еще и $c_{v_n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\{v_n\}$ — некоторая подпоследовательность натуральных чисел. В этом случае из последнего утверждения вытекает

Следствие 6. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\lambda_n} z^{\lambda_n} \in A(|z| < R)$, где $c_{v_n} = 0$ и $\{\lambda_n\}_0^{\infty} = \{n\}_0^{\infty} \setminus \{v_n\}_0^{\infty}$, и система $\{\psi_n(z)\}$ полна в кольце $K(r, R)$, то для

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \psi_n(t) f(zt) dt$$

в области $D \equiv (|z| < R)$ необходима и достаточна полнота системы $\{z^{k_n}\}$ в области D .

Доказательство достаточности этого утверждения, в случае $\lambda_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, принадлежит И. Ф. Лохицу⁽³⁾.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $\psi_n(z) = 1 / (z - \alpha_n)$, $|\alpha_n| < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$ расходится. Во-первых, положим, что $F(z, u)$ — аналитическая функция по z в кольце $K(r, R)$ и аналитическая по u в круге $|u| < R$. В этом случае в силу (3) функции $\Phi_n(z)$ имеют вид

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{F(z, t) dt}{t^{n+1}} = \frac{\partial^n F(z, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}.$$

В то же время, в силу (2), имеем

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{F(z, t) dt}{t - \alpha_n} = F(z, \alpha_n).$$

Таким образом, справедливо

Следствие 7. Пусть функция $F(z, u)$ аналитическая по z в кольце $K(r, R)$ и аналитическая по u в круге $|u| < R$. Кроме того, последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$, где $|\alpha_n| < 1$, такова, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$ расходится.

Тогда для полноты системы последовательных производных $\left\{ \frac{\partial^n F(z, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0} \right\}$ в кольце $K(r, R)$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{F(z, \alpha_n)\}$ была полна в кольце $K(r, R)$.

В частности, положим, что $F(z, u) = f(z + u)$, причем $f(z)$ — аналитическая функция из класса $A(|z| < 1 + R)$. Легко заметить, что в этом случае функции $\Phi_n(z)$ имеют вид $\Phi_n(z) = f^{(n)}(z)$, $n = 0, 1, \dots$, и $\Phi_n(z) = f(z + \alpha_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т. е. справедливо (см. (4)).

Следствие 8. Пусть $f(z) \in A(|z| \leq R + 1)$ и $\{\alpha_n\}$ — последовательность комплексных чисел, причем $|\alpha_n| < 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$ расходится.

Тогда для полноты системы функций $\{f^{(n)}(z)\}$ в круге $|z| < R$ необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{f(z + \alpha_n)\}$ была полна в круге $|z| < R$.

Институт кибернетики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965, стр. 1.
² И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 45 (1949). ³ И. Ф. Лохин, Уч. зап. Горьковск. унив., 28, 24 (1955). ⁴ Ю. А. Казьмин, УМН, 12, № 2 (74), 151 (1957).