

С. П. АНДРЕЕВ

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком А. Б. Мигдалом 4 IX 1972)

1. Как было показано в ^(1, 2), многократное рассеяние частиц в присутствии магнитного поля обладает рядом особенностей. Однако в ⁽¹⁾ и в ⁽²⁾ рассмотрение задачи проводилось чисто классически. Целью настоящей работы является получение квантового кинетического уравнения и его решение в случае сильных магнитных полей, когда классическое рассмотрение несправедливо.

Рассмотрим стационарную задачу рассеяния электрона на атомах вещества с потенциалом $U(\mathbf{r}) = \sum_a U_0(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_a|)$ в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H} \parallel z$: $A_x = -Hy$; $A_y = A_z = 0$. Матрицу плотности электронов в вигнеровском представлении определим через матрицу плотности в координатном представлении, как ⁽³⁾

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = V^{-1} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \rho \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{x}}{2}, \mathbf{r} + \frac{\mathbf{x}}{2} \right) e^{-il^2 y \mathbf{x}_z}, \quad (1)$$

$$l^2 = c\hbar / (|e|H).$$

Уравнение для функции F было получено в ⁽³⁾:

$$\left\{ \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{kH}] \nabla_{\mathbf{k}} \right\} F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \hat{T}_{\mathbf{kq}} F(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (2)$$

$$\hat{T}_{\mathbf{kq}} = \left[\exp \left(\frac{\mathbf{q}\nabla_{\mathbf{k}}}{2} \right) - \exp \left(-\frac{\mathbf{q}\nabla_{\mathbf{k}}}{2} \right) \right].$$

Определение вигнеровской функции (1) позволяет сделать рассмотрение задачи не зависящим от выбора калибровки магнитного поля ^(3, 4).

2. С помощью методики, развитой в ⁽⁵⁾, получим уравнение для функции F , усредненной по расположению рассеивающих центров. Вещество предполагается в среднем однородным.

Усредняя (2) по расположению атомов вещества, получим в правой части средние $\langle U_{\mathbf{q}} F(\mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rangle$. Далее, умножая (2) на $U_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$, придем к уравнению для величины $\varphi_1 = \langle U_{\mathbf{q}} F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rangle$:

$$\left\{ -\frac{i\hbar \mathbf{kq}}{m} + \frac{e}{mc} [\mathbf{kH}] \nabla_{\mathbf{k}} \right\} \varphi_1 = -\frac{in_0}{\hbar} |U_0(\mathbf{q})|^2 \hat{T}_{\mathbf{kq}} \langle F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rangle, \quad (3)$$

n_0 — плотность рассеивающих центров. Здесь, как в ⁽⁵⁾, произведена замена среднего $\langle U_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}'} F \rangle$ на $\langle U_{\mathbf{q}} \rangle \cdot \langle U_{\mathbf{q}'} F \rangle$, что законно, если выполнены неравенства ^(3, 5)

$$\hbar / \tau \ll \hbar^2 k^2 / (2m) \text{ или } \omega_{\text{H}} \tau \gg 1; \quad |U_0| \ll \hbar^2 k_z / (ma), \quad (4)$$

a — радиус действия поля $U_0(\mathbf{r})$, τ — время между столкновениями.

Уравнение (3) легко интегрируется в цилиндрических координатах $k_z \parallel \mathbf{H}$; подстановка φ_1 в усредненное уравнение (2) приводит к замкнутому уравнению для $\langle F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rangle$:

$$\left\{ \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{kH}] \nabla_{\mathbf{k}} \right\} \langle F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rangle =$$

$$\times \hat{T}_{\mathbf{kq}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' G_{k_z q_z}^{\varphi \varphi'} (\mathbf{k}_{\perp} \parallel \mathbf{k}'_{\perp}, \mathbf{q}_{\perp}) \hat{T}_{\mathbf{k}' \mathbf{q}} \langle F(\mathbf{k}', \mathbf{r}) \rangle,$$

$$G_{\alpha}^{\varphi \varphi'} (\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1) = \frac{n_0}{\hbar^2 \omega_H} \sum_{\mathbf{q}} |U_0(\mathbf{q})|^2 \exp(il^2(\alpha + i\delta)(\varphi - \varphi') + il^2[\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1]). \quad (5)$$

3. Полученное уравнение справедливо для любых значений \mathbf{H} и является квантовым аналогом кинетического уравнения Больцмана — основного уравнения, используемого для исследования многократного рассеяния в веществе ⁽⁷⁾. Условия применимости уравнения хорошо выполняются; см. ^(8, 9), где исследовался циклотронный резонанс (при наличии квантования) в Ge и Si ⁽⁸⁾ (нейтральные примеси $n_0 = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, температура образца $T = 4,2^\circ\text{K}$) и Ge ⁽⁹⁾ (рассеяние на ионизированных примесях $n_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T = 11^\circ\text{K}$). Получено значение $\omega_H \tau \approx 100 \gg 1$.

4. В случае рассеяния широких пучков электронов на пластине вещества толщины L функция $\langle F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rangle$ может зависеть лишь от $k_z, |\mathbf{k}_{\perp}|, z$. При этом интегрирование по φ' в (5) сводится к интегрированию по $\varphi_{\mathbf{q}'}$ и уравнение принимает вид

$$\frac{\hbar k_z}{m} \nabla_z \langle F(\mathbf{k}, z) \rangle = \frac{i}{2\pi} \hat{T}_{\mathbf{kq}} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{q}'} \sum_n \frac{G_n^{\varphi \varphi'} (\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{q}'_{\perp})}{[l^2 k_z q_z - n + i\delta]} \hat{T}_{\mathbf{kq}'} \langle F(\mathbf{k}, z) \rangle, \quad (6)$$

δ — функциональные части $[l^2(k_z \pm q_z/2)q_z - n + i\delta]^{-1}$, возникающие в (6) под действием оператора T , выражают собой закон сохранения энергии при рассеянии, в силу которого изменение продольной компоненты импульса $\hbar k_z$ сопровождается переходом на соответствующий уровень Ландау ⁽⁶⁾.

Энергия электрона, находящегося на k -м уровне Ландау, дается формулой ⁽⁶⁾

$$E_k = p_z^2/(2m) + \hbar \omega_H (k + 1/2).$$

Наибольший интерес представляет случай рассеяния медленных электронов:

$$v_z = p_z/m < (2\hbar |e|H/(m^2 c))^{1/2} \cong 10^4 H^{1/2},$$

находящихся на основном уровне Ландау $k = 0$, для которых невозможен переход из основного состояния в возбужденные, в силу чего рассеяние приводит лишь к «перевороту» импульса $\hbar k_z$.

Составляя матрицу плотности электрона в основном состоянии из соответствующих функций Ландау ⁽⁶⁾, усредняя ее по всем возможным положениям $y_0 = -cp_z/(|e|H)$ координаты (широкий пучок!), получим в отсутствие рассеяния

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = F_0(\mathbf{k}) = V^{-1} \cdot 8\pi^2 l^2 \delta(k_z - p_z/\hbar) \exp(-k_{\perp}^2 l^2). \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что для сферически-симметричного атомного потенциала и функции F_0 главные значения сумм по n в (6) равны нулю и вклад дают лишь δ -функции. Далее, для всех разумных значений \mathbf{H} выполняется неравенство $l \gg a$, в силу чего $U_0(\mathbf{q}) = U_0(0)$. Оставляя в (6) лишь член с $n = 0$ (переходов нет!), ищем решение в виде

$$F(\mathbf{k}, z) = f(k_z, z) \exp(-k_{\perp}^2 l^2). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), придем к уравнению для f :

$$\nabla_z f(k_z, z) = \gamma \operatorname{sgn} k_z [f(-k_z, z) - f(k_z, z)],$$
$$\gamma \equiv 32\pi^4 n_0 m |U_0(0)|^2 / (\hbar \omega_H P_z^2 l^4). \quad (9)$$

В качестве граничного условия к уравнению (9) потребуем отсутствия потока отраженных электронов на правой $z = L$ границе пластины ⁽⁷⁾.

Заменяя в (9) k_z на $-k_z$, вычитая полученное уравнение из (9), легко получить, с учетом граничных условий:

$$f(k_z, z) = \frac{f(0)}{1 + \gamma L} \left\{ [1 + \gamma(L - z)] \delta\left(k_z - \frac{p_z}{\hbar}\right) + \gamma(L - z) \delta\left(k_z + \frac{p_z}{\hbar}\right) \right\}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что характерная глубина проникновения электронов в вещество порядка

$$L_{\text{эф}} \sim 1/\gamma = \hbar \omega_H P_z^2 l^4 / (32\pi^4 n_0 m |U_0|^2).$$

Отметим также, что проведенное при получении уравнения (5), (6) усреднение требует выполнения неравенств $L_{\text{эф}} \gg l, n_0^{-1/2}$.

Автор глубоко признателен Ю. А. Гурвичу и М. И. Рязанову за постоянное внимание к работе и помощь, а также Н. П. Калашникову за полезные обсуждения.

Московский инженерно-физический
институт

Поступило:
22 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. А. Черников, ЖЭТФ, 32, 389 (1957). ² С. П. Андреев, ЖЭТФ, 62, 514 (1972). ³ Ю. А. Гурвич, ЖЭТФ, 61, 1120 (1971). ⁴ И. Б. Левинсон, ЖЭТФ, 57, 660 (1969). ⁵ А. Б. Мигдал, ДАН, 105, 77 (1955). ⁶ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, 1963. ⁷ Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, 1960. ⁸ M. Fukai, H. Kawamura et al., J. Phys. Soc. Japan, 19, 30 (1964). ⁹ K. Sekido, M. Fukai, H. Kawamura, J. Phys. Soc. Japan, 19, 1579 (1964).