

УДК 532.58

ГИДРОМЕХАНИКА

О. В. ВОИНОВ, А. Г. ПЕТРОВ

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 2 X 1972)

В потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, движется пузырь с поверхностью S . Неоднородный поток вызван движением поверхности S_0 , состоящей из одной или нескольких связанных частей, на которых заданы кинематические условия (фиксирован закон движения). Потенциал поля скоростей Φ_0 основного потока, вызванного только движением поверхности S_0 определяется из решения задачи Неймана и предполагается известной функцией пространственных координат и времени.

Потенциал поля скоростей жидкости $\bar{\Phi}$, обусловленный движением пузыря S и поверхности S_0 , можно представить в виде $\bar{\Phi} = \Phi_0 + \Phi$, где Φ — гармоническая функция в объеме, занимаемом жидкостью, стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = v_n - \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \Big|_S, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = 0, \quad (1)$$

где v_n — нормальная скорость перемещения границы пузыря.

Задача состоит в выводе уравнений, определяющих движение пузыря в заданном потоке.

Запишем вариационный принцип для объема $\bar{V}$, ограниченного изнутри поверхностями S и S_0 , а снаружи сферой S_e :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\bar{V}} \rho \frac{v^2}{2} d\tau dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S+S_0+S_e} (p - \rho U) \delta x_\alpha n_\alpha dS dt = 0; \quad (2)$$

здесь и далее n_α — компонента нормалей, внешней к объему $\bar{V}$, занимаемому жидкостью, по одинаковым индексам α подразумевается суммирование ($\alpha = 1, 2, 3$); U — потенциал массовых сил. Виртуальные перемещения δx_α должны удовлетворять уравнению несжимаемости.

Если течение жидкости потенциальное, а положение и форма пузыря однозначно определяются конечным числом обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_n$, то, переходя к пределу в уравнении (2) при стремлении радиуса сферы S_e к бесконечности и выделяя голономную часть, можно найти лагранжиан динамической системы с конечным числом степеней свободы, а затем получить обыкновенные дифференциальные уравнения движения этой системы. Для выполнения этих преобразований необходимо учесть, что

$$\frac{d}{dt} \delta x_\alpha = \delta v_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

где δq_i — вариации координат q_i . Поэтому

$$\frac{d}{dt} (r^2 \delta x_\alpha) = r^2 \delta v_\alpha + 2x_\beta v_\beta \delta x_\alpha, \quad r^2 = x_\alpha x_\alpha.$$

Поскольку скорость v_a на бесконечности является малой порядка не ниже $1/r^2$, то из последнего равенства можно заключить, что $r^2 \delta x_a$ на конечном промежутке времени является ограниченной функцией.

Интеграл по объему V в (2) сводится к поверхностному интегралу. Подынтегральная функция $p - \rho U$ на бесконечности, как следует из интеграла Коши — Лагранжа, стремится к $c(t)$ -функции, зависящей только от времени. Таким образом, в пределе вариационное уравнение (2) приводится к виду

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{S+S_0} \frac{\rho}{2} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_S (p - \rho U) \delta x_a n_a dS + c(t) \delta V \right] dt = 0,$$

где

$$\delta V = \int_{S_0} \delta x_a n_a dS = - \int_S \delta x_a n_a dS;$$

здесь δV имеет смысл вариации объема пузыря. Интеграл от $p - \rho U$ по поверхности S_0 равен нулю в силу условия внешних связей на этой поверхности $\delta x_a n_a = 0$.

Если давление газа внутри пузыря p_g однородно, то виртуальная работа на поверхности пузыря сил давления равна $p_g \delta V - \sigma \delta S$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, δS — вариация площади поверхности пузыря.

Таким образом, вариационное уравнение можно представить в следующем виде:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} p_g \delta V dt = 0,$$

$$L = -\sigma S + \frac{\rho}{2} \int_{S+S_0} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \int_V (c(t) + \rho U) d\tau, \quad (3)$$

где L — лагранжиан системы — зависит от времени t , обобщенных координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$. Последний интеграл в выражении L берется по объему пузыря V .

Пусть вариации $\delta q_i = 0$ при $t = t_1$, $t = t_2$. Тогда уравнения движения, соответствующие вариационной задаче (3), имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = p_g \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Обобщенные силы $p_g \partial V / \partial q_i$, вообще говоря, нельзя включить в функцию Лагранжа, так как в общем случае p_g может зависеть от дополнительных переменных параметров (например, температуры), которые должны определяться из других уравнений.

Уравнения (4) сохраняют свой вид, если к L добавить

$$\rho \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau - \rho \int_S \Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \frac{\rho}{2} \int_{S_0} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS.$$

Действительно, первые два слагаемых дают полную производную по времени от интеграла по объему V от функции $\rho \Phi_0$, а последнее слагаемое не зависит от обобщенных координат и скоростей.

После преобразований при помощи интеграла Коши — Лагранжа для невозмущенного потока с потенциалом Φ_0 , а также формулы Грина для гармонических функций получится следующее окончательное выражение для функции Лагранжа:

$$L = \frac{\rho}{2} \int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \sigma S - \int_V p_0 d\tau, \quad (5)$$

где p_0 — давление в невозмущенном потоке.

Полученная формула дает возможность эффективно решать проблему о движении тела малых размеров в неоднородном и нестационарном потоке.

Основные сложности при вычислении функции Лагранжа (5) связаны с нахождением потенциала Φ на поверхности пузыря S , т. е. с решением краевой задачи (1) для многосвязной области. В дальнейшем будут рассматриваться приближенные решения этой задачи.

Пусть ξ — отношение характерного размера пузыря к расстоянию пузыря до границы S_0 . В нулевом приближении ($\xi \rightarrow 0$) потенциал Φ будет определяться из внешней задачи Неймана для односвязной области, т. е. вместо (1) необходимо выполнение лишь первого граничного условия.

Пусть характерный размер пузыря R существенно меньше характерного масштаба изменения скорости основного потока. Тогда, разлагая Φ_0 в ряд по шаровым функциям в окрестности пузыря и подставляя в первое условие (1), получим

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = v_n - v_a^0 n_a + \dots, \quad v_a^0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_a}, \quad (6)$$

где v_a^0 — компонента скорости невозмущенного потока в точке разложения, за которую удобно принять геометрический центр пузыря.

Конкретный вид функции Лагранжа (5) можно получить, если задать семейство поверхностей S с конечным числом параметров q_i , однозначно определяющих положение и форму пузыря. Так, для сферического пузыря с четырьмя степенями свободы (q_1, q_2, q_3 — декартовы координаты центра сферы, R — радиус сферы)

$$L = \frac{1}{2} \pi \rho R^3 (v_r^2 + 6R^2) - 4\pi R^2 \sigma - \frac{1}{2} \pi R^3 p_0, \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{q}' - \mathbf{v}_0, \quad (7)$$

где $\mathbf{v}_0$ и p_0 — известные функции координат q_1, q_2, q_3 и времени, соответствующие невозмущенному потоку.

Выражение для функции Лагранжа (7) справедливо с точностью до малых величин порядка R^5 .

Подставляя (7) в (4), с помощью уравнений Эйлера для невозмущенного потока можно получить

$$\begin{aligned} q_a'' &= -\frac{3}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial q_a} - 3 \frac{R}{R} v_{ra}, \\ RR'' + \frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{4} v_r^2 &= \frac{p_g - p_0}{\rho} + \frac{2\sigma}{\rho R}, \end{aligned}$$

где p_0 и U — соответственно давление невозмущенного потока и потенциал массовых сил в центре сферы.

Как видно из уравнений, пузырь постоянного радиуса в идеальной жидкости при отсутствии массовых сил движется с ускорением, равным трем ускорениям потока.

Пусть радиус кривизны поверхности S_0 существенно превышает расстояние z от центра сферы до S_0 . Тогда решение краевой задачи (1) приближенно равно потенциалу сферы вблизи плоской границы, а функция L определяется по формуле

$$L = \frac{\pi}{3} \rho R^3 (v_r^2 + 6R^2 (1 + \xi) - 6\xi^2 R v_{rz}) - 4\pi R^2 \sigma - \frac{4}{3} \pi R^3 p_0, \quad (8)$$

где $\xi = R/(2z)$.

После подстановки (8) в (4) получаются уравнения, определяющие динамику пузыря с учетом взаимодействия его с поверхностью S_0 .

Обобщенная сила, действующая на тело со стороны жидкости,

$$F_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (9)$$

Если положить вариации поверхности и объема равными нулю, то рассмотренный подход можно применить к изучению движения твердого

тела в жидкости. Тогда формула (3) дает известное выражение ⁽¹⁾ составляющей функции Лагранжа, соответствующей движению жидкости. При этом обобщенных координат будет шесть. Постоянная σS в (3) и (5) окажется несущественной.

Из формул (7) и (9) можно вычислить силу, действующую на сферу постоянного радиуса со стороны жидкости,

$$F_a = -\frac{\rho}{2} V \ddot{q}_a + \frac{3}{2} \rho V w_a, \quad (10)$$

где w_a — ускорение жидкости в точке q_a в отсутствие сферы.

Формула (10) является обобщением формулы Н. Е. Жуковского ⁽²⁾ для неподвижной сферы в потоке $\Phi_0 = \varphi(x, y, z)f(t)$.

Для твердого тела, размеры которого малы по сравнению с масштабом изменения скорости невозмущенного потока, в первом приближении в правой части формулы (5) стоит разность кинетической энергии в относительном движении и величины $p_0 V$:

$$L \approx \frac{\rho}{2} m_{a\beta} (\dot{q}_a - v_a^0) (\dot{q}_\beta - v_\beta^0) - p_0 V; \quad (11)$$

здесь $m_{a\beta}$ — коэффициенты присоединенных масс при поступательном движении тела в безграничной жидкости, q_a — декартовы координаты фиксированной точки твердого тела, например, геометрического центра, v_a^0 и p_0 — соответственно скорость и давление невозмущенного потока в точке q_a , для простоты вращение не учтено. Формулы (9), (11) дают выражение для силы, действующей на произвольное тело со стороны жидкости. В частном случае сферы получается формула (10), в случае цилиндра в плоском потоке — формула, согласующаяся с результатами работ ^(3, 4).

Выражение для силы F_a можно получить путем интегрирования сил давления по поверхности тела, причем давление определяется из интеграла Коши — Лагранжа. Однако для получения выражения для силы с той же точностью, что и из формулы (9), необходимо учитывать следующий член разложения в (6) и определять потенциал с большей точностью. Поэтому рассматриваемый подход является наиболее эффективным для определения уравнений движения тела в неоднородном потоке и для расчета гидродинамических реакций.

Авторы благодарят акад. Л. И. Седова и В. Л. Бердичевского за ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Биркгоф, Гидродинамика, ИЛ, 1963. ² Н. Е. Жуковский, Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. Полное собр. соч., 2, 1935. ³ М. И. Гуревич, Механика жидкости и газа, № 3 (1968). ⁴ Ю. Л. Якимов, Механика жидкости и газа, № 2 (1970).