Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. П. ДИДЕНКО

# О ЗАДАЧАХ ТИПА КОШИ — ГУРСА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

*(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 15 IX 1972)*

1. Постановки задач. В области $\Omega$, ограниченной поверхностями

$$S_1:\quad (x^2+y^2)^{1/2}=r_1-{}^2/_3 z^{3/2},\quad r_1=\text{const}>0;$$

$$S_2:\quad (x^2+y^2)^{1/2}=r_2+{}^2/_3 z^{3/2},\quad r_2=\text{const}>0,\quad r_1>r_2;$$

$$S_3:\quad z=0,$$

рассмотрим уравнение

$$z(u_{xx}+u_{yy})-u_{zz}=h. \tag{1}$$

Задача I. Найти непрерывную в $\overline{\Omega}$ функцию $u$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega$ и граничным условиям

$$\begin{gathered} u=0\quad \forall (x,y,z)\in S_2,\\ u=u_z=0\quad \forall (x,y,z)\in S_3. \end{gathered} \tag{2}$$

Сопряженной к задаче I является

Задача II. Найти непрерывную в $\overline{\Omega}$ функцию $u$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega$ и граничным условиям

$$u=0\quad \forall (x,y,z)\in S_1. \tag{3}$$

Поверхности $S_1$ и $S_2$ являются характеристическими для уравнения (1).

Теперь рассмотрим область $\Omega_1$, ограниченную поверхностями $S_2$, $S_3$, определенными выше, а в качестве $S_1$ возьмем любую кусочно гладкую поверхность $z=\varphi(x,y)$, на которой выполняется неравенство $z(n_x^2+n_y^2)-n_z^2<0$ и границей которой является окружность

$$x^2+y^2={}^1/_4(r_1+r_2)^2,\quad z=[{}^3/_4(r_1-r_2)]^{2/3},$$

$n_x$, $n_y$, $n_z$ — косинусы нормали к поверхности $S_1$.

Сопряженной к задаче I в области $\overline{\Omega}_1$ является

Задача III. Найти непрерывную в $\overline{\Omega}$ функцию $u$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega$ и граничным условиям

$$u=u_n=0\quad \forall (x,y,z)\in S_1; \tag{4}$$

здесь $u_n$ — производная по нормали к $S_1$.

На важность изучения подобных задач указано в [1]. Дальше путем вывода априорных оценок исследуется обобщенная разрешимость рассмотренных задач.

2. Априорные оценки. Рассмотрим тождество, справедливое для любой гладкой в $\Omega_1$ функции $u$:

$$\int_{\Omega_1} uL(Du)\,d\Omega=\int_\Gamma (uz(Du)_x n_x+uz(Du)_y n_y-u(Du)_z n_z)\,d\Gamma+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma}[u_z^2 - z(u_x^2+u_y^2)]\,cn_z\,d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\{(zc)_z(u_x^2+u_y^2)+c_zu_z^2\}\,d\Omega,$$

где $Du = cu_z$, $c(x, y, z)$ — произвольная пока функция, $n_x$, $n_y$, $n_z$ — косинусы внешней нормали к границе $\Gamma$ области $\Omega_1$. В тождестве (5) положим $c = z$, $zu_z = v$,

$$u = \int_{S_1}^{z} t^{-1}v(x, y, t)\,dt,$$

$v$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям (2).

После соответствующих вычислений из тождества (5) получаем неравенство

$$c_1|v|_{W^1_{S_2\cup S_3}} \geqslant |Lv|_{W^{-1}_{S_1}} \geqslant c_2|v|_{W^0}, \tag{6}$$

где через $W^1_{S_2\cup S_3}$ обозначено замыкание по норме $\left(\int_{\Omega_1}[z(u_x^2+u_y^2)+u_z^2]d\Omega\right)^{1/2}$ гладких функций $u$, удовлетворяющих условиям (2); $W_{S_1}{}^1$ — замыкание по той же норме гладких функций $u$, удовлетворяющих условию (4), $W_{S_1}{}^{-1}$ — негативное пространство, сопряженное $W_{S_1}{}^1$, $W^0$ — пространство интегрируемых с квадратом в $\Omega_1$ функций, $c_1$, $c_2$ здесь и дальше означают положительные постоянные, не зависящие от $v$.

Для вывода другой априорной оценки в тождестве (5) положим $c = \varepsilon z - z^{-1}$, $(\varepsilon z - z^{-1})u_z = v$,

$$u = \int_{S_2\cup S}^{z} (\varepsilon t - t^{-1})^{-1}v(x, y, t)\,dt,$$

$v$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию (4).

Аналогично предыдущему получаем неравенство

$$c_1|v|_{W^1_{S_1}} \geqslant |Lv|_{W^{-1}_{S_2\cup S_3}} \geqslant c_2|v|_{W^0}. \tag{7}$$

Неравенства (6), (7) справедливы для области $\Omega_1$. Совершенно так же выводятся эти неравенства для области $\Omega$, разница только в том, что на этот раз поверхность $S_1$ является характеристической.

3. Следствия из априорных оценок. Из неравенства (7) следует существование слабого решения задачи I, т.е. для любого $h \in W^0$ существует функция $u \in W^1_{S_2\cup S_3}$ такая, что для всех гладких функций $v$, удовлетворяющих условиям (4), справедливо равенство

$$(h, v) = (u, Lv); \tag{8}$$

здесь круглые скобки означают скалярное произведение в $W^0$.

Полученное слабое решение обращается в нуль на $S_2 \cup S_3$ в сильном смысле и $u_z = 0$ на $S_3$ в слабом смысле. Если слабое решение гладкое, то оно удовлетворяет условиям (2) в обычном смысле. Покажем, что слабое решение $u \in W^1_{S_2\cup S_3}$ задачи I единственно. Действительно, поскольку гладкие функции, финитные возле поверхностей $S_2$ и $S_3$, плотны в $W^1_{S_2\cup S_3}$, то найдется последовательность гладких функций $u_i$, которые удовлетворяют условиям (2) и $|u - u_i|_{W^1_{S_2\cup S_3}} \to 0$ при $i \to \infty$. Используя неравенство (6), получаем, что тогда

$$|Lu_i - \tilde{h}|_{W^{-1}_{S_1}} \to 0, \quad i \to \infty.$$



Покажем, что $h = \tilde{h}$, тогда из неравенства (6) будет следовать единственность. Действительно, для каждой $u_i$ из рассмотренной последовательности имеем

$$(h_i, v) = (u_i, Lv).$$

Вычитая это равенство из (8), получим

$$(h - h_i, v) = (u - u_i, Lv).$$

Таким образом, последовательность $h_i = Lu_i$ сходится по норме $W_{S_1}^{-1}$ к $h$, что и требовалось доказать.

Такие же рассуждения приводят нас к существованию и единственности слабых решений задач II и III.

Определение. Функция $u$ называется сильным решением, если существует последовательность функций $u_i$, обращающихся в нуль в полоске возле поверхности $S$-носителя граничных условий, и таких, что

$$|u - u_i|_{W_S^1} \to 0, \quad |Lu_i - h|_{W_{\Gamma\setminus S}^{-1}} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Из рассмотренных выше неравенств следует существование и единственность сильных решений задач I, II, III.

Следует отметить, что из этих же неравенств следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} [z(v_x^2 + v_y^2) + v_z^2]\, d\Omega \leqslant c_1 |Lv|_{W^0}$$

для гладких $v$, удовлетворяющих условиям или (2), или (3), или (4).

Полученные результаты обобщаются на уравнение

$$k(z) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_{zz} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a u_z + b u = h, \tag{9}$$

где $k(z)$ — непрерывно дифференцируемая в рассматриваемой области функция от $z$, для которой $k(z) > 0$ при $z > 0$, $k(0) = 0$, $\partial k / \partial z > 0$, остальные коэффициенты подчиняются условиям типа дифференциальных неравенств, нужных для вывода соответствующих априорных оценок.

Краевые задачи для уравнения (9) ставятся аналогично, а в определении пространств $W_S^1$ вместо «веса» $z$ участвует «вес» $k(z)$.

Киевское высшее инженерное радиотехническое училище противовоздушной обороны

Поступило 22 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959.