

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

М. И. ЖУРАВЛЕВА

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ РАЗРЫВОВ ПЕРВОГО РОДА ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТА

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 10 VII 1972)

Краевая задача Римана $\Phi^+ = G\Phi^-$ с конечным числом разрывов первого рода $G(t) \neq 0$ была решена в 1941 г. ((¹), гл. VI) независимо друг от друга (различными методами) Ф. Д. Гаховым и Н. И. Muskhelishvili. Задача Римана с бесконечным индексом и непрерывным коэффициентом рассматривалась Н. В. Говоровым и другими авторами (⁴⁻¹⁰).

В данной статье дается решение задачи для случая счетного множества разрывов нигде не обращающегося в нуль коэффициента $G(t)$, $t \in L$: $\{1 \leq t \leq \infty\}$, имеющего бесконечный индекс степенного порядка (⁶). Функция $\ln G(t)$ задается в виде разности непрерывной функции и некоторой ступенчатой функции. Назовем функцию $[f(t)]_N \equiv f(t_n)$, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, ступенчатой частью функции $f(t)$ по последовательности N : $\{t_n, \nearrow +\infty\}$. При этом $f(t)$ предполагаем строго монотонно возрастающей. Через $\tilde{B}$ обозначим класс функций, аналитических в области D с границей L : $\{1 \leq t \leq \infty\}$ и ограниченных в любом круге $|z| \leq R$; через B , $B \subset \tilde{B}$, — класс функций, ограниченных в D ; через B_σ , $B_\sigma \subset B$, — класс функций вполне регулярного роста (в.р.р.) порядка σ , $0 < \sigma < 1/2$.

Возьмем на контуре L две произвольные последовательности N_k : $\{1 < t_{1,k} < t_{2,k} < \dots\}$, $t_{n,k} \rightarrow \infty$, $k = 1, 2$. Рассмотрим в области D краевую задачу Римана*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad 1 \leq t \leq \infty, \quad t \neq t_{n,2}, \quad (1)$$

при условиях

$$\arg G(t) = \varphi(t)t^\rho - m(t), \quad m(t) = [\varphi_0(t)t^\rho]_{N_1}, \quad \varphi_0(t)t^\rho \nearrow; \quad (2)$$

при этом имеет место представление

$$\{\varphi(t) - \varphi_0(t)\}t^\rho = \psi(t)t^\sigma, \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 < \sigma < \min(1/2, \rho), \quad (3)$$

$$\varphi(t) \in H_\mu, \quad \varphi_0(t), \psi(t) \in H_{\mu_0}, \quad (\rho - \sigma)/(1 + \rho - \sigma) < \mu \leq 1, \quad 0 < \mu_0 \leq 1. \quad (4)$$

В $[t_{n,1}, t_{n+1,1})$ выберем $\arg G(t)$ под условием ($n = 1, 2, \dots$)

$$\arg G(1) = -2\pi\beta_0, \quad m(t_n) - m(t_n - 0) = -2\pi\beta_n, \quad 0 < \beta_n < 1. \quad (5)$$

Функцию $\ln |G(t)|$ будем считать:

- непрерывной по Гёльдеру на каждом интервале $(t_{n,2}, t_{n+1,2})$;
- допускающей асимптотическое представление

$$\ln |G(t)| = \lambda_2 t^{\sigma_0} + o(t^{\sigma_0}), \quad 0 \leq \sigma_0 \leq \sigma, \quad t \rightarrow \infty; \quad (6)$$

в) в $t_{n,2}$ имеющей произвольные скачки $\Delta_n = o(t_{n,2}^{\sigma_0})$, $n \rightarrow \infty$.

Наконец, полагаем

$$\varphi(\infty) = \lambda_1 > 0, \quad \lambda_1 > |\lambda_2| \operatorname{tg} \alpha \text{ при } \sigma_0 = \sigma, \quad -\infty < \lambda_2 < +\infty \text{ при } \sigma_0 < \sigma. \quad (7)$$

* Как показывают исследования, в точках $t_{n,2}$ предельные значения $\Phi^\pm(t_{n,2})$ могут не существовать, но всегда $\Phi^\pm(t_{n,1}) = 0$.

Определение порядка, индикатора и функции в.р.р. в открытом и замкнутом углах берется нами из ^(2, 5).

Нами используется доказанная в ⁽¹¹⁾

Теорема 1. Если $F(z)$ имеет в.р.р. в угле $(\alpha, \beta)^*$ и непрерывный индикатор $h_F(\theta)$ в точках α и β , то $F(z)$ имеет в.р.р. и в замкнутом угле $[\alpha, \beta]$.

Следствие. Если $F(z)$ имеет в.р.р. в (α, β) и $h_F(\alpha) \leq h_F(\alpha + 0)$, $h_F(\beta) \leq h_F(\beta - 0)$, то $F(z)$ имеет в.р.р. в $[\alpha, \beta]$.

Следствие вытекает из общих соотношений для индикатора:

$$h(\alpha + 0) \leq h(\alpha) \leq +\infty, \quad h(\beta - 0) \leq h(\beta) \leq +\infty.$$

По аналогии с ⁽⁵⁾ введем в рассмотрение функцию

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\ln G(x)}{x(x-z)} dx \right\},$$

которую назовем канонической. Функция $X(z)$ удовлетворяет крайнему условию (1).

Лемма 1. В точках $t_{n, k}$ функция $X(z)$ имеет оценки

$$K_n |z - t_{n, 1}|^{\beta_n} < |X(z)| < M_n |z - t_{n, 1}|^{\beta_n}, \quad z \rightarrow t_{n, 1}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ K_n < |X(z)| < M_n, \quad z \rightarrow t_{n, 2}; \quad M_n, K_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 2. Функция $X(z)$ в $[0, 2\pi]$ имеет порядок, не превосходящий ρ .

Лемма 3. При выполнении условий (2)–(7) справедливо асимптотическое представление

$$\ln G(t) = i[\lambda_1 t^\sigma + \alpha(t) t^\nu] + \lambda_2 t^{\sigma_0} + o(t^{\sigma_0}), \quad \nu < \sigma,$$

где $\alpha(t)$ — вещественная ограниченная функция.

Лемма 4. В любом угле $[\eta, 2\pi - \eta]$, $\eta > 0$, функция $X(z)$ имеет в.р.р. порядка σ с индикатором $(\eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta)$:

$$h_X(\theta) = -1/2 [\lambda_1 \cos \sigma(\theta - \pi) + \tilde{\lambda}_2 \sin \sigma(\theta - \pi)] / \sin \sigma\pi, \quad \lambda_2 = \begin{cases} \lambda_2, & \sigma_0 = \sigma, \\ 0, & \sigma_0 < \sigma. \end{cases}$$

Лемма 5. Для индикатора $h_X(\theta)$ справедливы неравенства

$$h_X(0) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\sigma} \ln |X^+(t)| \leq -1/2 [\tilde{\lambda}_2 - \lambda_1 \operatorname{ctg} \sigma\pi] \equiv h_X(+0),$$

$$h_X(2\pi) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\sigma} \ln |X^-(t)| \leq -1/2 [\tilde{\lambda}_2 + \lambda_1 \operatorname{ctg} \sigma\pi] \equiv h_X(2\pi - 0).$$

Из лемм 4 и 5, следствия теоремы 1 и условия $\lambda_1 > |\tilde{\lambda}_2| \operatorname{tg} \sigma\pi$ вытекает

Теорема 2. Функция $X(z) \in B_\sigma$ и имеет индикатор

$$h_X(\theta) = -1/2 [\lambda_1 \cos \sigma(\theta - \pi) + \tilde{\lambda}_2 \sin \sigma(\theta - \pi)] / \sin \sigma\pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Следствие. $X(z)$ при $z \rightarrow \infty$ имеет показательный порядок убывания, т. е.

$$\max_{|z|=r} |X(z)| < e^{-Kr^\sigma}, \quad K > 0.$$

Замечание. Каноническая функция при $\lambda_1 < |\tilde{\lambda}_2| \operatorname{tg} \sigma\pi$ является решением задачи (1)–(7) в классе B , но при этом уже $X(z) \notin B$.

Теорема 3. Общее решение задачи (1)–(7) в классе $\bar{B}$ имеет вид

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \quad (8)$$

где $F(z)$ — любая целая функция. В точках $t_{n, 1}$ всякое решение $\Phi(z) \in \bar{B}$ имеет корни порядка не ниже β_n .

* Углы $\alpha < \arg z < \beta$ и $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ обозначены через (α, β) и $[\alpha, \beta]$.

Теорема 4. *Общее решение в классе В однородной краевой задачи Римана (1)–(7) выражается формулой (8), где $F(z)$ – целая функция порядка $\sigma_F \leq \sigma$, удовлетворяющая на контуре L асимптотическим соотношениям:*

а) при $\lambda_2 > 0$ ($C_F = \text{const}$):

$$\ln |F(t)| < C_F - \frac{1}{2} \ln |G(t)| - \frac{t}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x) x^{\rho} - m(x)}{x(x-t)} dx; \quad (9)$$

б) при $\lambda_2 < 0$:

$$\ln |F(t)| < C_F + \frac{1}{2} \ln |G(t)| - \frac{t}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x) x^{\rho} - m(x)}{x(x-t)} dx; \quad (10)$$

в) при $\lambda_2 = 0$ одновременно выполняются соотношения (9) и (10). Индикатор решения $\Phi(z)$ выражается формулой ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$h_{\Phi}(\theta) = h_F^*(\theta) - \frac{1}{2} [\lambda_1 \cos \varphi(\theta - \pi) + \tilde{\lambda}_2 \sin \varphi(\theta - \pi)] / \sin \pi, \quad (11)$$

где $h_F^*(\theta)$ – формальный индикатор функции $F(z)$ (7).

Замечание 1. При $\sigma_F < \sigma$ условия (9) и (10) заведомо выполняются и потому не нуждаются в особой проверке.

Замечание 2. При $\lambda_2 > 0$ неравенство (10) вытекает из (9), при $\lambda_2 < 0$ (9) вытекает из (10), при $\lambda_2 = 0$ эти неравенства, вообще говоря, не следуют друг из друга.

Теорема 5. *Общее решение задачи (1)–(7) в классе B_{σ} имеет вид (8) с индикатором (11), где $F(z)$ – функция в.р.р. формального порядка σ , подчиненная условиям а), б), в).*

Теорема 6. *Общее решение задачи (1)–(7) в классе функций порядка убывания σ :*

$$\max_{|z|=r} |\Phi(z)| \leq e^{-K r^{\sigma}}, \quad K > 0,$$

выражается формулой (8), где целая функция $F(z)$ удовлетворяет условиям: 1) или $\sigma_F < \sigma$, 2) или $\sigma_F = \sigma$ и

$$h_F(0) < \min \{-h_X(0), -h_X(2\pi)\}.$$

Замечание. Условие $\mu > (\rho - \sigma) / (1 + \rho - \sigma)$ является существенным: при его соблюдении по заданной функции $\varphi(t)$ можно построить соответствующую строго монотонно возрастающую функцию $\varphi_0(t)t^{\rho}$, обеспечивающую выполнение представления (3). Если же $\mu < (\rho - \sigma) / (1 + \rho - \sigma)$, то задача (1)–(7) в определенных случаях задания $|G(t)|$ может оказаться неразрешимой.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Н. В. Говорову, руководившему настоящей работой.

Кубанский государственный университет
Краснодар

Поступило
6 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, 1963. ² Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, 1956. ³ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1962. ⁴ Н. В. Говоров, ДАН, 154, № 6 (1964). ⁵ Н. В. Говоров, Сборн. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, в. 6, Харьков, 1968. ⁶ Н. В. Говоров, ДАН, 182, № 4 (1968). ⁷ Н. В. Говоров, Сборн. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, в. 15, Харьков, 1972. ⁸ П. Г. Юров, Изв. Высш. учебн. завед., сер. матем., № 2 (51) (1966). ⁹ Ф. Д. Беркович, Е. М. Коньшкова, Сообщ. Ростовск. научн. математ. общ., 1968. ¹⁰ М. Э. Толочко, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 4 (1969). ¹¹ Н. В. Говоров, О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости, Кандидатская диссертация, Ростовский гос. унив., 1966.