Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 1

УДК 517.948.3+518:512+513.88 **МАТЕМАТИКА**

А. В. КРЯНЕВ

РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 4 VII 1972)

Рассмотрим уравнение

$$Ax = f, \tag{1}$$

где A: $H \to H$ — самосопряженный неотрицательный линейный оператор; H — гильбертово пространство; $f \in AH$ — заданный элемент. Предполагается, что уравнение (1) разрешимо не для всех $f \in H$.

Если A несамосопряжен или не неотрицателен, то вместо (1) будем работать с эквивалентным уравнением

$$A^*Ax = A^*f, \tag{2}$$

где A^* — сопряженный к A оператор.

В настоящей заметке предлагается новый метод решения уравнения (1), удобный для реализации на ЭЦВМ.

1. Теорема 1. *Пусть B: $H \to H$ — самосопряженный положительно определенный линейный оператор, $\rho(C)$ — спектральный радиус оператора $C = (A + B)^{-1}B$. Имеет место равенство $\rho(C) = 1$.*

Рассмотрим итерационный процесс (и.п.)

$$Ax_n + \varepsilon x_n = \varepsilon x_{n-1} + f, \tag{3}$$

где $x_0 \in H$, $\varepsilon > 0$.

Существует ограниченный обратный $(A + \varepsilon I)^{-1}$. Поэтому и.п. (3) эквивалентен и.п.

$$x_n = (A + \varepsilon I)^{-1}\varepsilon x_{n-1} + (A + \varepsilon I)^{-1}f. \tag{4}$$

Из теоремы 1 следует, что для оператора $C = (A + \varepsilon I)^{-1}\varepsilon$ имеет место равенство $\rho(C) = 1$. Очевидно, C — самосопряженный положительно определенный оператор.

Из теоремы Красносельского ([1]) следует

Теорема 2. *Для любого $x_0 \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\{x_n\}$ из (3) сходится к решению уравнения (1).*

Рассмотрим теперь и.п.

$$Ax_n + Bx_n = B_{n-1} + f, \tag{5}$$

где $x_0 \in A$; B — оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 1. И.п. (5) эквивалентен п.п.

$$x_n = Cx_{n-1} + (A + B)^{-1}f, \tag{6}$$

где $C = (A + B)^{-1}B$. Из теоремы 1 следует, что $\rho(C) = 1$ *. Если операторы $(A + B)^{-1}$ и B не коммутируют, то C — несамосопряженный оператор. Имеет место

Теорема 3. *Для любого $x_0 \in H$ последовательность $\{x_n\}$ из (5) сходится к решению уравнения (1).*

---

* Если A — положительно определенный оператор, то $\rho(C) < 1$.

2. Пусть H_0 — множество таких x, для которых $Ax = 0$. Пусть $H = H_0 \dotplus H^0$ — прямая сумма подпространств H_0 и H^0, P_0 — проектор на H_0. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ из (5) сходилась, необходимо и достаточно существование решения уравнения* (1). *Выбор $x_0 \in H$ на сходимость $\{x_n\}$ не влияет. Точнее, если $\{x_n\}$ сходится при некотором фиксированном x_0, то $\{x_n\}$ * сходится при любом выборе $x_0 \in H$. Если уравнение (1) имеет единственное решение x^*, то $x_n \to x^*$ для любого $x_0 \in H$. Если же уравнение (1) имеет несколько решений, то при различных x_0 последовательности $\{x_n\}$ сходятся, вообще говоря, к различным решениям.*

Лемма 2. *Для любого решения x^* уравнения (1) существует x_0 такой, что $x_n \to x^*$. Последовательности $\{x_n\}$ с одинаковыми P_0x_0 сходятся к одному и тому же решению.*

Лемма 3. *Существует единственное решение $x_\perp$ уравнения* (1), *такое, что $P_0x_\perp = 0$. Из всех решений решение $x_\perp$ и только оно имеет минимальную норму. $x_\perp$ может быть получено как предел последовательности $\{x_n\}$ из* (5), *если за начальный элемент x_0 взять такой, что $P_0x_0 = 0$, в частности, достаточно взять $x_0 = 0$.*

$x_\perp$ принято называть нормальным решением уравнения (1) ([2]).

Если (1) имеет несколько решений, то часто требуется выбрать из них такое $x_{\text{опт}}$, для которого

$$\|x_{\text{опт}} - x_{з}\| = \min \|x - x_{з}\|, \tag{7}$$

здесь $x_з$ — заданный элемент и минимум берется по всем решениям уравнения (1).

Лемма 4. *Для сходимости $\{x_n\}$ из* (5) *к $x_{\text{опт}}$ из* (7) *необходимо и достаточно, чтобы $P_0x_0 = P_0x_з$.*

3. На практике обычно оператор A и элемент f известен приближенно. Более того, даже если A и f известны точно, то при фактическом решении системы (5) обязательно вносятся ошибки хотя бы за счет округления цифр. Применяя принцип эквивалентного возмущения, мы всегда можем считать, что ошибки промежуточных вычислений эквивалентны некоторому возмущению A и f. В связи с указанным выше рассмотрим и.п.

$$(A + \Delta A)x_n' + Bx_n' = Bx_{n-1}' + f + \Delta f, \tag{8}$$

где ΔA и Δf — суммарные возмущения A и f соответственно. Пусть $\|\Delta f\| \leqslant \delta$, $\|\Delta A\| \leqslant M\delta$, $\|f\| \leqslant N$, $\|B^{-1}\Delta A\| < 1$. Существует постоянная $N_0 > 0$, не зависящая от n, такая, что $\|x_n\| \leqslant N_0$ для всех n; здесь $\{x_n\}$ из (5). Обозначим $\|(A + B)^{-1}B\| = q \geqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть x^* — решение уравнения* (1), *для которого $x_n \to x^*$. Тогда имеет место оценка* **

$$\|x^* - x_n'\| \leqslant M_0(n) + \delta \frac{q^n - 1}{q - 1} \|B^{-1}\| [MN_0q + MN\|B^{-1}\| + 1 + o(\delta)]; \tag{9}$$

здесь $0 \leqslant M_0(n) \to 0$ при $n \to +\infty$, $0 \leqslant o(\delta) \leqslant C_0\delta$, C_0 от δ не зависит.

Теорема 5. *Для любого $\varepsilon > 0$, любого $x_0 \in H$ (так что $x_n \to x^*$) и любого $\eta \geqslant 1$ существуют $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \eta, x_0) > 0$ и целое $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0) \geqslant 0$ такие, что из неравенства $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ следует неравенство $\|x^* - x_n'\| \leqslant \varepsilon$ для всех целых $n \in [n_0, \eta \cdot n_0]$.*

Теоремы 4 и 5 показывают, что при неточном задании оператора A и элемента f существует такое $n_{\text{опт}} \geqslant 0$, возможно, бесконечное, при котором

* Мы не делаем различий в записи последовательностей $\{x_n\}$ при различном выборе x_0.

** Если $q = 1$, то оценка (9) принимает вид

$$\|x^* - x_n'\| \leqslant M_0(n) + \delta n \|B^{-1}\| [MN_0 + MN\|B^{-1}\| + 1 + o(\delta)].$$

$\|x^*-x'_{n\,\text{опт}}\|=\min\limits_{n\geqslant 0}\|x^*-x_n\|$. Возникает естественный вопрос о нахождении $n_{\text{опт}}$. Пусть A и B — матрицы порядка $m\times m$. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — сингулярные числа матрицы $AB^{-1/2}$, $\lambda_{\min}$ — минимальное из отличных от нуля чисел $\{\lambda_i\}$, $q=1/(1+\lambda^2_{\min})<1$. Тогда за приближенное значение $n_{\text{опт}}$ можно взять $[x]$, где x — корень уравнения

$$q^x=\delta M_1x\,/\,\sqrt{1+M_2x^2}; \tag{10}$$

здесь M_1, M_2 — положительные постоянные, зависящие только от матриц A, B и векторов f, x_0. Можно выписать формулы для нахождения чисел M_1, M_2, но, к сожалению, они имеют довольно громоздкий вид.

4. При фактической реализации и.п. (5) на ЭЦВМ будет рассматриваться и.п. вида (5), где A — неотрицательная симметричная $(m\times m)$-матрица (или A — положительно определенная, но плохо обусловленная матрица), B — положительно определенная симметричная $(m\times m)$-матрица, все x_n и f принадлежат E^m. Так как матрица $A+B$ симметричная положительно определенная и не является плохо обусловленной, то для решения системы (5) применим следующий простой и эффективный метод. С помощью метода квадратных корней ([3]) представим $A+B=C'C$, где C — верхняя треугольная матрица. Система (5) эквивалентна системе

$$C'y_n=Bx_{n-1}+f,\quad Cx_{n-1}=y_{n-1}. \tag{11}$$

Система (11) на каждом шаге может быть легко решена с большой точностью. Заметим, что для нахождения матрицы C требуется $0{,}5m^3$ эквивалентных сложений (э.с.), для реализации одной итерации по формулам (11) требуется $4{,}5m^2$ э.с. Точность результата возрастает, если вычисления проводить с повышенной точностью (например, двойной).

Для реализации и.п. (5) можно применять и метод Воеводина ([4]). В этом случае затраты машинного времени такие же, как и в схеме Воеводина, соединенной с методом регуляризации ([5]).

Метод, предложенный в настоящей заметке, был применен для нахождения решений интегральных уравнений первого рода и систем линейных неоднородных алгебраических уравнений с плохо обусловленными или вырожденными матрицами и дал хорошие результаты. В качестве B брали диагональные и трехдиагональные матрицы, соответствующие регуляризаторам Тихонова нулевого и первого порядка ([5]) соответственно.

Следует отметить, что в работе ([6]) встречается и.п. вида (3).

Автор благодарен В. Я. Арсенину и М. А. Красносельскому за ценные замечания, учтенные при написании данной работы. Автор признателен коллективу кафедры Математической физики МИФИ и участникам семинара по некорректным задачам в Институте прикладной математики АН СССР за полезное обсуждение результатов работы.

Московский инженерно-физический
институт

Поступило
27 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, УМН, **15**, в. 3, 161 (1960). [2] А. Н. Тихонов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **5**, № 4, 718 (1965). [3] В. В. Воеводин, Численные методы алгебры, «Наука», 1966. [4] В. В. Воеводин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 9, № 3, 673 (1969). [5] А. Н. Тихонов, ДАН, **151**, № 3, 501 (1963). [6] B. Martinet, Rev. Fr. Inf. Res. Operat., R3, 154 (1970).