Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 535.36+523.035 ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР В. В. СОБОЛЕВ

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ И ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ СРЕДЫ

Как известно, соотношение между излучательной и поглощательной способностью тела при термодинамическом равновесии дается законом Кирхгофа. Однако возникает вопрос о соотношении между этими величинами для среды, способной излучать, поглощать и рассеивать лучистую энергию, при отсутствии термодинамического равновесия. Указанный вопрос для случая монохроматического излучения был рассмотрен в статье автора ([1]). Теперь тем же методом мы получим аналогичное соотношение для случая излучения в спектральной линии.

Пусть данная среда заполняет некоторый произвольный объем V. Обозначим через $\alpha(\nu, \mathbf{r})$, $\sigma(\nu, \mathbf{r})$ и $\varkappa(\nu, \mathbf{r})$ соответственно коэффициенты поглощения, рассеяния и истинного поглощения для излучения частоты ν в точке $\mathbf{r}$ и через λ — вероятность выживания фотона, не зависящую от $\mathbf{r}$. Имеем

$$\alpha(\nu, \mathbf{r}) = \sigma(\nu, \mathbf{r}) + \varkappa(\nu, \mathbf{r}), \qquad \lambda = \sigma(\nu, \mathbf{r}) \,/\, \alpha(\nu, \mathbf{r}). \tag{1}$$

Примем, что из фотонов частоты ν_1, поглощенных элементарным объемом, переизлучается в интервале частот от ν_2 до $\nu_2 + d\nu_2$ доля $\lambda g(\nu_1, \nu_2)\,d\nu_2$. Закон перераспределения излучения по частоте, выражаемой функцией $g(\nu_1, \nu_2)$, будем считать произвольным.

Сначала допустим, что объем V освещен параллельными лучами частоты ν_1, создающими освещенность H перпендикулярной к ним площадки. Тогда энергия, поглощенная объемом, будет равна

$$E_a = H \int \alpha(\nu_1, \mathbf{r})\, e^{-\tau(\nu_1, \mathbf{r})} dV, \tag{2}$$

где $\tau(\nu_1, \mathbf{r})$ — оптическое расстояние вдоль луча от поверхности до точки $\mathbf{r}$; интегрирование производится по всему объему.

Поглощенные объемом фотоны участвуют затем в процессе многократного рассеяния. В результате часть энергии претерпевает истинное поглощение (т. е. переходит в иную форму), а другая часть выходит из объема наружу (т. е. рассеивается им). Обозначая эти энергии соответственно через E_{ta} и E_s, можем написать

$$E_a = E_{ta} + E_s. \tag{3}$$

Чтобы определить каждое из слагаемых в (3), введем в рассмотрение величину $p(\nu_1, \nu_2, \mathbf{r}, \mathbf{n})\,d\nu_2 d\omega$, представляющую собой вероятность того, что фотон частоты ν_1, поглощенный в точке $\mathbf{r}$, выйдет из объема наружу (вообще говоря, после многократных рассеяний) в интервале частот от ν_2 до $\nu_2 + d\nu_2$ в направлении $\mathbf{n}$ внутри телесного угла $d\omega$ (см. ([2])). Для определения функции $p(\nu_1, \nu_2, \mathbf{r}, \mathbf{n})$ получаем интегральное уравнение

$$p(\nu_1, \nu_2, \mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\lambda}{4\pi} g(\nu_1, \nu_2)\, e^{-\tau(\nu_2, \mathbf{r}, \mathbf{n})} + \\ + \frac{\lambda}{4\pi} \iint g(\nu_1, \nu) \frac{e^{-t(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{s^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \alpha(\nu, \mathbf{r}')\, p(\nu, \nu_2, \mathbf{r}', \mathbf{n})\, d\nu\, dV, \tag{4}$$

где $\tau(\nu_2, \mathbf{r}, \mathbf{n})$ — оптическое расстояние от точки $\mathbf{r}$ в направлении $\mathbf{n}$ до границы объема, $t(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — оптическое расстояние между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}$ и

$s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — геометрическое расстояние между ними. Интегрирование в (4) ведется по всему объему V и по всем частотам.

Обозначим через $P(\nu, \mathbf{r})$ вероятность того, что излучение частоты ν_1, поглощенное в точке $\mathbf{r}$, выйдет из объема V во всех направлениях и во всех частотах. Обозначим также через $Q(\nu_1, \mathbf{r})$ среднее число рассеяний фотона частоты ν_1, поглощенного в точке $\mathbf{r}$. Так как при каждом элементарном акте рассеяния гибнет доля фотонов, равная $1 - \lambda$, то мы, очевидно, имеем

$$(1-\lambda)Q(\nu_1, \mathbf{r}) = 1 - P(\nu_1, \mathbf{r}). \tag{5}$$

Уравнение для определения функции $P(\nu_1, \mathbf{r})$ получается из (4) интегрированием по всем частотам и направлениям. Оно имеет вид

$$P(\nu_1, \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi}\iint g(\nu_1, \nu_2)\, e^{-\tau(\nu_2, \mathbf{r}, \mathbf{n})} d\nu_2\, d\omega + \\ + \frac{\lambda}{4\pi}\iint g(\nu_1, \nu)\, \frac{e^{-t(\nu;\, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{s^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}\, \alpha(\nu, \mathbf{r}')\, P(\nu, \mathbf{r}')\, d\nu\, dV. \tag{6}$$

Подставляя $P(\nu, \mathbf{r})$ из (5) в (6) и пользуясь соотношением

$$\int g(\nu_1, \nu)\, d\nu = 1, \tag{7}$$

приходим к уравнению для определения функции $Q(\nu_1, \mathbf{r})$:

$$Q(\nu_1, \mathbf{r}) = 1 + \frac{\lambda}{4\pi}\iint g(\nu_1, \nu)\, \frac{e^{-t(\nu,\, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{s^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}\, \alpha(\nu, \mathbf{r}')\, Q(\nu, \mathbf{r}')\, d\nu\, dV. \tag{8}$$

Уравнение, аналогичное (8), было получено ранее ([3]) при монохроматическом рассеянии света и при полном перераспределении по частоте внутри спектральной линии.

С помощью функций $P(\nu, \mathbf{r})$ и $Q(\nu, \mathbf{r})$ находим следующие выражения для энергии, испытавшей в объеме истинное поглощение, и для энергии, рассеянной этим объемом:

$$E_{ta} = (1-\lambda)\, H \int \alpha(\nu_1, \mathbf{r})\, e^{-\tau(\nu_1, \mathbf{r})} Q(\nu_1, \mathbf{r})\, dV, \tag{9}$$

$$E_s = H \int \alpha(\nu_1, \mathbf{r})\, e^{-\tau(\nu_1, \mathbf{r})} P(\nu_1, \mathbf{r})\, dV. \tag{10}$$

Предположим теперь, что источники энергии расположены внутри объема V и коэффициент излучения, обусловленный этими источниками, есть $\varepsilon_0(\nu, \mathbf{r})$. Для коэффициента излучения $\varepsilon(\nu, \mathbf{r})$, обусловленного как непосредственно источниками энергии, так и процессом многократного рассеяния, имеем уравнение

$$\varepsilon(\nu, \mathbf{r}) = \varepsilon_0(\nu, \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{4\pi}\iint g(\nu', \nu)\, \frac{e^{-t(\nu',\, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{s^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}\, \alpha(\nu', \mathbf{r})\, \varepsilon(\nu', \mathbf{r}')\, d\nu'\, dV. \tag{11}$$

Обозначим через $E_e(\nu, \mathbf{n})\, d\nu\, d\omega$ энергию, излучаемую данным объемом в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ в направлении $\mathbf{n}$ внутри телесного угла $d\omega$. Величина E_e определяется формулой

$$E_e(\nu, \mathbf{n}) = \int \varepsilon(\nu, \mathbf{r})\, e^{-\tau(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{n})} dV. \tag{12}$$

Будем считать, что источники энергии распределены равномерно, т. е. отношение коэффициента излучения для этих источников к коэффициенту поглощения не зависит ни от частоты, ни от места. Иными словами,

$$\varepsilon_0(\nu, \mathbf{r}) = \alpha(\nu, \mathbf{r}) B_0, \tag{13}$$

где $B_0 = \mathrm{const}$. Тогда, сравнивая между собой уравнения (8) и (11) и пользуясь тем, что

$$g(\nu', \nu)\alpha(\nu', \mathbf{r}) = g(\nu, \nu')\alpha(\nu, \mathbf{r}). \tag{14}$$

находим

$$\varepsilon(\nu, \mathbf{r}) = \alpha(\nu, \mathbf{r})\, Q(\nu, \mathbf{r})\, B_0. \tag{15}$$

Подстановка (15) в (12) дает

$$E_e(\nu, \mathbf{n}) = B_0 \int \alpha(\nu, \mathbf{r}) e^{-\tau(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{n})} Q(\nu, \mathbf{r}) \, dV. \tag{16}$$

Сопоставляя (16) с (9) и полагая

$$B_0 = \lambda H, \tag{17}$$

получаем искомое соотношение

$$\frac{E_{ta}(\nu, -\mathbf{n})}{E_e(\nu, \mathbf{n})} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\varkappa}{\sigma}. \tag{18}$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату. Отношение энергии частоты ν, падающей на объем в виде параллельных лучей в некотором направлении и испытавшей в нем истинное поглощение, к энергии той же частоты, излучаемой объемом при равномерном распределении источников в обратном направлении внутри единичного телесного угла, равно отношению коэффициента истинного поглощения к коэффициенту рассеяния. При этом предполагается выполнение формул (13) и (17).

Соотношение (18) было получено раньше ([1]) для случая монохроматического излучения (когда $g(\nu_1, \nu_2) = \delta(\nu_2 - \nu_1)$, где δ — функция Дирака). Из соотношения (18) вытекает также формула, доказанная в работе ([4]) для случая полубесконечной среды при полном перераспределении излучения по частоте (когда $g(\nu_1, \nu_2) = A\sigma(\nu_2)$, где A — нормирующий множитель).

Соотношение (18) может быть использовано при решении различных конкретных задач. Допустим, например, что нам известна энергия, излучаемая объемом при равномерном распределении в нем источников. Тогда при помощи (18) можно найти энергию, претерпевающую истинное поглощение в объеме при освещении его параллельными лучами. Пользуясь также формулой (3), можно определить и энергию, рассеянную объемом во все стороны.

Следует отметить, что соотношение (18) выполняется не только при освещении объема параллельными лучами, но и при действии на него любых других источников энергии. Чтобы показать это, достаточно рассмотреть тонкий луч частоты ν, входящий в данный объем. В этом случае энергия, испытавшая в объеме истинное поглощение, будет определяться формулой (9), в которой интегрирование производится не по всему объему V, а лишь по части его, освещенной лучом (однако функция Q относится ко всему объему V). В свою очередь, под величиной E_e должна пониматься энергия частоты ν, излучаемая освещенной частью объема в направлении, обратном направлению луча, и рассчитанная на единицу телесного угла. Иначе говоря, величина E_e определяется формулой (12), в которой интегрирование ведется по части объема, освещенной лучом, при равномерном распределении источников энергии во всем объеме. Применяя формулу (15), мы и приходим к соотношению (18). В сущности, вывод этого соотношения основан на том, что функция источников $B(\nu, \mathbf{r}) = \varepsilon(\nu, \mathbf{r}) / \alpha(\nu, \mathbf{r})$ при равномерном распределении источников энергии и функция $Q(\nu, \mathbf{r})$ совпадают между собой с точностью до постоянного множителя.

Подчеркнем, что соотношение (18) справедливо при произвольном объеме. Представляет интерес применение его к различным геометрическим формам, наиболее часто встречающимся на практике (полубесконечная среда, плоский слой, шар и др.).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
20 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соболев, Астрофизика, 8, 197 (1972). [2] В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет, М., 1956. [3] В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 5, 137 (1967). [4] J. L. Linsky, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, **12**, 777 (1972).