

УДК 512.25/26

МАТЕМАТИКА

А. А. КАПЛАН

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 28 IX 1972)

Пусть $f, g^1, g^2, \dots, g^m$ — выпуклые функции, заданные в пространстве R^n ; $\Omega = \{x: g^j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\}$ — телесный компакт. В качестве исходной рассматривается задача минимизации функции f на множестве Ω .

Введением штрафов за выход из множества Ω решение этой задачи может быть сведено к последовательному решению вспомогательных задач на безусловный экстремум. Именно, выбирая подходящим образом функции штрафа $\Phi_k, k = 1, 2, \dots$, можно добиться, чтобы при безусловной минимизации функций $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x), k = 1, 2, \dots$, соответствующая последовательность точек минимума $\{x^k\}$ имела предельные точки, каждая из которых доставляла бы решение исходной задачи.

Весьма общую характеристику функций штрафа для задач указанного вида дает следующая

Теорема* 1. Пусть Φ_k — выпуклые функции,

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = 0, \text{ если } x \in \text{int } \Omega;$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = +\infty, \text{ если } x \notin \Omega.$$

Тогда, начиная с некоторого K , функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ достигают своего безусловного минимума. Последовательность точек минимума функций $F_k, k \geq K$, имеет предельные точки; любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству Ω и доставляет минимум f на Ω .

Доказательство. Сопоставим произвольному $\delta > 0$ выпуклое множество $\Omega_\delta = \{x: \rho(x, \Omega) \leq \delta\}$, где $\rho(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$, и рассмотрим множество $\Omega_{\delta_1} \setminus \Omega_{\delta_2}$, считая, что $0 < \delta_1 < \delta_2$. Пусть S — телесный многогранник, $S \subset \text{int } \Omega$. Фиксируя произвольным образом $x^1 \in \text{int } S, u \in Q = \Omega_{\delta_1} \setminus \Omega_{\delta_2}$ (черта означает замыкание), выберем на отрезке с концами x^1 и u точку $x^2 \in \text{int}(\Omega_{\delta_1} \setminus \Omega)$. Множество $S' = \{z = x^2 + \lambda(x^2 - x): \lambda > 0, x \in \text{int } S\}$ содержит точку u с некоторой окрестностью U .

В силу условий теоремы, при фиксированных $\varepsilon > 0$ и $M > \varepsilon$ можно указать номер K^1 , начиная с которого

$$\max_{x \in S} \Phi_k(x) < \varepsilon, \quad \Phi_k(x^2) > M.$$

Ввиду выпуклости функций Φ_k отсюда следует, что при $k \geq K^1$ неравенство $\Phi_k(x) > M$ имеет место для $x \in U$.

На основании приведенных рассуждений с учетом компактности Q можно гарантировать существование конечного покрытия

$$\{S^i\}, \quad i = 1, 2, \dots, v; \quad \bigcup_{i=1}^v S^i \supset Q,$$

* В (1) аналогичное утверждение доказано при существенно иных требованиях относительно функций f и Φ_k .

такого, что на каждом из множеств S^i , начиная с некоторого L^i , при $k \geq L^i$ имеет место неравенство $\Phi_k(x) > M$. Следовательно, при $k \geq L$, где $L = \max_{1 \leq i \leq n} L^i$, это неравенство будет выполняться на всем Q .

Поскольку функция f ограничена на Ω_{δ_0} , ясно, что при достаточно большом k функция F_k должна достигать своей точной нижней грани, причем $\min_{x \in R^n} F_k(x) < F_k(y)$, если $y \in R^n \setminus \Omega_{\delta_0}$. Тем самым, из последовательности $\{x^h\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{h_j}\}$. Точка $\bar{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{h_j}$, как легко видеть, должна принадлежать Ω .

Остается показать, что $f(\bar{x}) = \min_{x \in \Omega} f(x)$. Если $f(\bar{x}) > \min_{x \in \Omega} f(x)$, найдется точка $\bar{x} \in \text{int } \Omega$ такая, что $f(\bar{x}) < f(\bar{x})$ ($f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - a$, $a > 0$). Тогда можно указать телесный многогранник $G \subset \text{int } \Omega$ ($\bar{x} \notin G$, $\{\bar{x} + \lambda(\bar{x} - \bar{x}) : \lambda > 0\} \cap \text{int } \Omega \neq \emptyset$) и число J так, что при $j > J$ для $x \in G$ имеют место неравенства

$$\Phi_{k_j}(x) > \Phi_{k_j}(x^{k_j}) + a/2. \quad (1)$$

С другой стороны, так как G — многогранник, найдутся числа $\mu(k_j)$ такие, что для $x \in G$

$$\Phi_{k_j}(x) < a/\mu(k_j), \quad (2)$$

причем $\mu(k_j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Замечая теперь, что, как бы ни было мало $\delta > 0$, при достаточно больших j мы имеем

$$\Phi_{k_j}(x) > -\delta, \quad (3)$$

$$\{\bar{x} + \lambda(\bar{x} - x^{h_j}) : \lambda > 0\} \cap G \neq \emptyset;$$

нетрудно показать, что соотношения (1), (2) и (3) противоречивы ввиду выпуклости функций Φ_k .

Как видно из приведенного доказательства, требование, чтобы функции Φ_k были выпуклы на всем R^n , может быть ослаблено.

Теорема 2. *Заключение теоремы 1 имеет место, если выполнены условия 1) и 2), а функции Φ_k выпуклы в области $\Omega_\delta = \{x: \rho(x, \Omega) \leq \delta\}$ при некотором $\delta > 0$ и квазивыпуклы на всем R^n .*

Следующая теорема, доказательство которой несложно, дает полезную информацию о характере приближения решений вспомогательных задач к решению исходной задачи.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 или 2 и, кроме того, для граничных точек множества Ω*

$$\Phi_k(x) \geq C > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, начиная с некоторого K , точки x^h лежат внутри Ω .

Ниже формулируются дополнительные требования относительно функций Φ_k , при выполнении которых метод штрафов одновременно с решением исходной задачи по существу дает решение двойственной задачи. Результаты такого рода, но для штрафных функций специального типа (именно, $\Phi_k(x) = A_k G(x)$, где в зависимости от свойств функции G либо $A_k \rightarrow \infty$, либо $A_k \rightarrow 0$) ранее были получены Мак-Кормиком и Фиакко^(2, 3).

В предположении о дифференцируемости функций $f, g^j, j = 1, 2, \dots, m$, двойственная задача (см., например, (4)) состоит в отыскании максимума функции

$$f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g^j(x)$$

при ограничениях

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla g^j(x) = 0.$$

Допустимое решение z исходной задачи и допустимое решение x, y ($y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$) двойственной задачи связаны соотношением

$$f(z) \geq f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g^j(x). \quad (4)$$

Теорема 4. Пусть функции $f, g^j, j = 1, 2, \dots, m$, дифференцируемы и существует точка $\tilde{x}$ такая, что $g^j(\tilde{x}) < 0, j = 1, 2, \dots, m$; функции $\Phi_k, k = 1, 2, \dots$, дифференцируемы и удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть также

$$\nabla \Phi_k(x) = \sum_{j=1}^m \Psi_k^j(x) \nabla g^j(x),$$

где функции Ψ_k^j неотрицательны и непрерывны на R^n , и при любом j имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k^j(z^k) = 0$, если $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g^j(z^k) < 0$.

Тогда, обозначая $u^k = \Psi_k^j(x^k)$, можно утверждать, что

1) последовательность $\{u^k\}$, где $u^k = (u_1^k, \dots, u_m^k)'$, имеет предельные точки;

2) точка $(\bar{x}, \bar{u})$, являющаяся пределом любой сходящейся подпоследовательности из $\{x^k, u^k\}$, доставляет решение двойственной задачи.

Доказательство. Отметим, что при наших предположениях в прямой и двойственной задачах существуют оптимальные решения, при постановке которых неравенство (4) превращается в равенство.

Легко видеть, что в условиях теоремы точки (x^k, u^k) является допустимой в двойственной задаче.

Пусть $x^* \in \text{int } \Omega$ — произвольная фиксированная точка. Из выпуклости f и $g^j, j = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} f(x^*) - f(x^k) &\geq (\nabla f(x^k), x^* - x^k) = \\ &= \sum_{j=1}^m \Psi_k^j(x^k) (\nabla g^j(x^k), x^* - x^k) \geq \sum_{j=1}^m \Psi_k^j(x^k) (g^j(x^k) - g^j(x^*)). \end{aligned}$$

Для точки $\bar{x} = \lim_{l \rightarrow \infty} x^{k_l}$ введем в рассмотрение множества

$$J^1(\bar{x}) = \{j: g^j(\bar{x}) = 0\}, \quad J^2(\bar{x}) = \{j: g^j(\bar{x}) < 0\}.$$

Ясно, что $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{j^{k_l}} = 0$ при $j \in J^2(\bar{x})$.

Далее, для достаточно больших l при $j \in J^1$ имеем

$$g^j(x^{k_l}) - g^j(x^*) > -1/2 g^j(x^*) > 0,$$

и из соотношений

$$\begin{aligned} f(x^*) - f(x^{k_l}) - \sum_{j \in J^2} \Psi_{k_l}^j(x^{k_l}) (g^j(x^{k_l}) - g^j(x^*)) &> \\ &> - \sum_{j \in J^1} \Psi_{k_l}^j(x^{k_l}) \frac{g^j(x^*)}{2} \geq - \max_{j \in J^1} \frac{g^j(x^*)}{2} \cdot \sum_{j \in J^1} u_{j^{k_l}} \end{aligned}$$

видно, что $\sup_l u_{j^{k_l}} \leq c$, где c — некоторая константа.

Ввиду допустимости точек (x^k, u^k) утверждение теоремы следует отсюда непосредственно.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 4 сохраняет силу, если ослабить требование выпуклости Φ_k в плане теоремы 2.

Приведем в заключение два примера функций штрафа, удовлетворяющих теоремам 1 (или 2), 3 и 4 (с учетом замечания к ней), которые не укладываются в схему Мак-Кормика и Фиакко.

Таковыми являются следующие функции:

$$1) \Phi_k(x) = \sum_{j=1}^m \exp[A_k^j g^j(x)], \text{ где } A_k^j > 0, A_k^j \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty;$$

$$2) \Phi_k(x) = \sum_{j=1}^m (\bar{g}^j(x) + 1)^k, \text{ где } k \text{ нечетные, } \bar{g}^j(x) = \frac{1}{M^j} g^j(x), \text{ а } M^j —$$

достаточно большое положительное число (больше, нежели $-\min_{x \in \Omega} g^j(x)$).

Отметим, что первая из этих функций использовалась Моцкиным при решении системы линейных неравенств.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 5, 787 (1966). ² А. Фиакко, G. McCormick, Man. Sci., 10, № 2, 360 (1964). ³ А. Фиакко, Г. Мак-Кормик, Нелинейное программирование, М., 1972. ⁴ Ph. Wolfe, Quart. Appl. Math., 19, № 3, 239 (1961).