

М. А. НАЙМАРК

**КРИТЕРИИ НЕПРИВОДИМОСТИ И ДИСКРЕТНОЙ
РАЗЛОЖИМОСТИ ОДНОРОДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО
КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ**

(Представлено академиком П. С. Новиковым 25 I 1972)

В этой статье сформулированы два достаточных условия неприводимости (одно из которых также необходимо) и достаточное условие дискретной разложимости на неприводимые представления однородного представления локально компактной группы. Кроме того, сформулировано достаточное условие полной неприводимости произвольного представления такой группы, которое, в случае связной комплексной полупростой группы Ли приводит к простым достаточным условиям полной неприводимости, являющимся, по-видимому, и необходимыми.

В статье используются терминология и обозначения статьи автора (¹).

1. Критерии неприводимости и полной неприводимости.

Теорема 1. Пусть T — представление группы G , однородное относительно U , с. Если выполнено по крайней мере одно из условий

- 1) $k(T, U, c) = 1$;
- 2) для каждого отличного от нуля вектора $\xi \in T_j^c E$

$$[T_j^c T(g) \xi, g \in G] = T_j^c E,$$

то T неприводимо.

Условие 2) также необходимо для неприводимости T .

Теорема 2. Пусть G — локально компактная группа, U — ее компактная подгруппа, обладающая счетной базой окрестностей, T — непрерывное представление группы G в E и пусть выполнены условия

- 1) T неприводимо;
- 2) $k(T, U, c) < \infty$ для каждого неприводимого представления c группы U .

Тогда T вполне неприводимо*.

Следствие 1. Пусть G — связная полупростая группа Ли с конечным центром Z , $\mathfrak{Z}$ — центр универсальной обертывающей алгебры Ли группы G . Если T — неприводимое представление группы G в банаховом пространстве, переводящее все элементы из Z и из $\mathfrak{Z}$ в операторы умножения на скаляр, то T вполне неприводимо.

Действительно, согласно известной теореме Хариш-Чандра (см. (⁴), стр. 236, теорема 4) в рассматриваемом случае выполняется условие 2) теоремы 2.

Следствие 2. Если G — связная полупростая группа Ли с конечным центром, то в классе элементарных представлений, а также подпредставлений приводимых элементарных представлений группы G , неприводимость равносильна полной неприводимости.

* Для групп Ли близкий результат получил Д. П. Желобенко (²); там же см. определение полной неприводимости. Близкий к теореме 2 результат получил также Фелл (³, стр. 282, лемма 10).

Для комплексных полупростых групп Ли (в этом случае условие конечности центра излишне) утверждение следствия 2 доказал ранее Д. П. Желобенко ⁽²⁾.

Наконец, комбинируя теоремы 1 и 2, приходим к следующему результату.

Теорема 3. Пусть G — локально компактная группа, U — ее компактная подгруппа, обладающая счетной базой окрестностей, c^0 — фиксированное неприводимое представление группы U , T — представление группы G , однородное относительно U , c^0 и пусть выполнено условие

1) $k(T, U, c) < \infty$ для каждого неприводимого представления c группы U ,

а также по крайней мере одно из условий:

2) $k(T, U, c^0) = 1$,

2') для каждого отличного от нуля вектора $\xi \in T_j^{c^0}E$

$$[T_j^{c^0}T(g)\xi, g \in G] = T_j^{c^0}E.$$

Тогда T вполне неприводимо.

2. Ассоциированные алгебры. Пусть, по-прежнему, U — компактная подгруппа группы G , c — фиксированное неприводимое представление группы U . Положим *

$$X_j^c = \{x, e_{jj}^c x = x e_{jj}^c = x\}. \quad (2,1)$$

Тогда X_j^c — подалгебра алгебры X . Пусть далее T — непрерывное представление группы G в пространстве E .

Положим далее $E_j^c = T_j^c E$. Пространство E_j^c назовем ассоциированным подпространством представления T , отвечающим данным U , c и j . E_j^c инвариантно относительно операторов $T(x)$, $x \in X_j^c$ и $T(x) = 0$ на $(1 - T_j^c)E$.

Обозначим через $a(x)$ сужение оператора $T(x)$ на E_j^c . Множество

$$\{a(x), x \in X_j^c\}$$

называется ассоциированной алгеброй представления T , отвечающей U , c , j , и обозначается через $\mathcal{A}(T, U, c, j)$. Очевидно, $\mathcal{A}(T, U, c, j)$ есть подалгебра алгебры $L(E_j^c)$.

Теорема 4. Пусть T — представление группы G в пространстве E такое, что $\hat{T}$ квазиоднородно относительно U , c . Если в E_j^c существует вектор $\xi_0 \neq 0$, являющийся собственным вектором для каждого оператора $a(x)$ из ассоциированной алгебры $\mathcal{A}(T, U, c, j)$, то в E существует замкнутое подпространство $M \neq (0)$, инвариантное относительно T , на котором T^M неприводимо.

Алгебра $\mathcal{A}$ линейных операторов в пространстве E называется дискретно диагонализруемой, если в E существует система векторов

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots\}, \quad (2,2)$$

обладающая следующими свойствами: 1) каждый вектор ξ_i есть общий собственный вектор для всех операторов алгебры $\mathcal{A}$; 2) каждая конечная подсистема системы (2,2) линейно независима; 3) $[\xi_1, \xi_2, \dots] = E$.

Представление T в пространстве E называют дискретной прямой суммой представлений T^α , $\alpha \in A$, в пространствах E^α и пишут $T = \sum_A \odot T^\alpha$, если выполняются условия 1) — 2) из (1) и, кроме

того, условие: 3') каждая конечная подсистема системы $\{M^\alpha, \alpha \in A\}$ ли-

* Определение операторов e_{jj}^c см., например, в (5), стр. 70.

нейно независима. Представление T называется дискретно разложимым, если $T = \sum_A \oplus T^\alpha$, где каждое T^α неприводимо.

Теорема 5. Пусть T — представление группы G в пространстве E , однородное относительно U и s ; если ассоциированная алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(T, U, s, j)$ дискретно диагонализирована, то T есть дискретная прямая сумма неприводимых представлений группы G .

3. Применение к комплексным полупростым группам Ли. Всюду в этом п. 3 G обозначает связную комплексную полупростую группу Ли, U — максимальную компактную подгруппу (компактную вещественную форму), Z — центр, $\mathfrak{Z}$ — центр универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли группы G , s^λ — неприводимое представление группы U веса λ , $c_{j\lambda}^\lambda(U)$ — матричные элементы представления s^λ в каноническом базисе, j_λ — тот из индексов j , которому отвечает вектор канонического базиса веса λ ; веса λ мы упорядочим лексикографически и будем считать их расположенными в порядке возрастания.

Положим

$$T_j^\lambda = T_j^{c^\lambda}, \quad T^\lambda = T_{j_\lambda},$$

$$\lambda_0(T) = \min\{\lambda, T^\lambda \neq 0\}.$$

Представление T группы G называется квазиоднородным (соответственно однородным) веса λ_0 , если $\lambda_0(T) = \lambda_0$ и если T квазиоднородно (соответственно однородно) относительно U , s^{λ_0} . Для однородных и квазиоднородных представлений группы G веса λ_0 справедливы все предложения и теоремы пп. 1, 2 и пп. 2, 3 в ⁽¹⁾, если термин «относительно U, s » заменить термином «веса λ_0 ».

Теорема 6. Пусть G — связная комплексная полупростая группа Ли и T — однородное представление этой группы веса λ_0 в банаховом пространстве E , переводящие все элементы из Z и из $\mathfrak{Z}$ в операторы умножения на скаляр. Если

$$\dim(T^{\lambda_0}E) = 1,$$

то представление T вполне неприводимо.

Утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1 и следствия 1 из п. 1.

Теорема 6 является частичным решением одной из задач, сформулированных автором в его докладе на международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 г. (см. ⁽⁶⁾, п. 3).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
15 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Наймарк, ДАН, 205, № 4 (1972). ² Д. П. Желобенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 108 (1968). ³ J. G. Fell, Acta mathematica, 114, 267 (1965). ⁴ Harish-Chandra, Trans. Am. Math. Soc., 76, 234 (1954). ⁵ Д. П. Желобенко, М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 57 (1970). ⁶ М. А. Наймарк, Actes Congr. Intern. Math. Congr. Nice, 2, 407 (1971).