Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 5

УДК 532.61.68 ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Э. А. РАУД, Б. Д. СУММ, Е. Д. ЩУКИН

РАСТЕКАНИЕ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 20 I 1972)

Растекание жидкостей по поверхности твердых тел играет важную роль во многих физико-химических явлениях и технологических процессах. Первое количественное описание кинетики квазистационарного растекания по горизонтальной поверхности, т. е. зависимости размера смоченной поверхности от времени, основано на сопоставлении уменьшения свободной поверхностной энергии системы и работы, необходимой для преодоления вязкого трения ([1]). Модель ([1]) включает ряд допущений: квазистационарность течения, пренебрежимость инерционными эффектами, постоянство массы жидкости. Чтобы пользоваться этой моделью, необходимо установить критерии ее применимости. В связи с этим цель данной работы состоит в анализе растекания ньютоновской жидкости по горизонтальной поверхности на основе более общих представлений, а именно — путем решения системы уравнений Навье — Стокса и непрерывности.

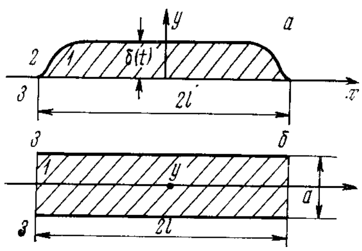

Рис. 1. Схема одномерного растекания тонкого слоя жидкости: *а* — вид сбоку, *б* — вид сверху. *1* — жидкость, *2* — среда, *3* — твердое тело

I. Одномерное растекание. Слой жидкости растекается по прямолинейной «дорожке» шириной a (рис. 1). Система уравнений, описывающая течение пленки жидкости, согласно ([2]), имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho}\Sigma f_x,\\ \frac{\partial p}{\partial y}=0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь u, v — компоненты скорости вдоль (ось x) и перпендикулярно поверхности твердого тела (ось y), p — давление, ρ, μ — плотность и вязкость жидкости, f_x — внешняя сила, действующая на единицу объема жидкости и направленная вдоль оси x, t — время. Система уравнений (1) справедлива при условии $\delta \ll l$ (где l — расстояние фронта жидкости от источника, δ — толщина слоя через время t). Из анализа системы (1) можно сделать следующие выводы.

1. Растекание квазистационарно, если локальной производной компоненты скорости по времени можно пренебречь по сравнению с членом, учитывающим вязкость. Это справедливо при времени

$$t \gg \frac{\rho}{\mu}\delta^2. \tag{2}$$

При $l \gg \delta$ толщина слоя $\delta = m / 2al\rho$ (m — масса слоя). Отсюда условие квазистационарности

$$t \gg Q^2 / \mu\rho, \tag{3}$$

где $Q(t) = m / 2la$ — плотность покрытия.

2. Инерционными эффектами можно пренебречь при скоростях

$$u \ll \mu l / \rho\delta^2, \tag{4}$$

или учитывая, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = u\rho\delta / \mu$, при $\mathrm{Re} \ll l / \delta$. Если растекание происходит ламинарно, вместо (4) необходимо более жесткое требование $\mathrm{Re} < 30$ [2], отсюда

$$u < 30\,\mu / Q. \tag{5}$$

Рассмотрим один из наиболее важных случаев растекания, который анализировался в модели [1] — растекание только за счет уменьшения свободной поверхности энергии системы. В соответствии с термодинамикой неравновесных процессов [3] внешнюю силу f_x, действующую на слой жидкости, можно представить как

$$f_x = -\frac{1}{V}\frac{\partial(\Delta W_s)}{\partial x}, \tag{6}$$

где ΔW_s — изменение свободной поверхностной энергии твердого тела при смачивании слоем жидкости объемом $V = m / \rho$. Величина $\Delta W_s = K(\sigma_{23} - \sigma_{13})\, ax$, где K — коэффициент шероховатости твердой поверхности [4], σ_{23}, σ_{13} — удельные свободные поверхностные энергии на границе твердого тела с окружающей средой и с жидкостью. При рассматриваемой геометрии растекающегося слоя (рис. 1)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\sigma_{12}}{\rho\delta l} \approx \frac{\sigma_{12}a}{m} \tag{7}$$

(σ_{12} — удельная свободная поверхностная энергия жидкости); тогда система (1) сводится к уравнению

$$\frac{2\Delta\sigma a}{m} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

где $\Delta\sigma = K(\sigma_{23} - \sigma_{13}) - \sigma_{12}$. Величину $F_s = \Delta\sigma a$ можно рассматривать как результирующую движущую силу растекания.

Граничные условия на свободной поверхности жидкости

$$\partial u / \partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = \delta(t) \tag{9}$$

и на границе жидкость — твердое тело

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{10}$$

В случаях, не осложненных химическими реакциями, интенсивным массообменом и т. д., μ, ρ, $\Delta\sigma$, $m = \mathrm{const}$. Тогда, интегрируя уравнение (8), находим профиль скорости в растекающемся слое

$$u = \frac{\Delta\sigma a\rho}{\mu m}(2\delta y - y^2). \tag{11}$$

Таким образом, скорость передвижения фронта жидкости

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\sigma a\rho}{m\mu}\delta^2. \tag{12}$$

Учитывая начальное условие растекания

$$x = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{13}$$

получим соотношение, описывающее кинетику одномерного растекания

$$x = \left(\frac{3}{4}\,\frac{\Delta\sigma m}{\mu\rho a}\right)^{1/3} t^{1/3}. \qquad (14)$$

II. Двухмерное растекание.

В случае растекания пленки жидкости ($\delta \ll l$) по кругу радиуса r система уравнений движения в цилиндрических координатах такова [5]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\sum f_r,\\
\partial p / \partial \varphi = 0,\\
\partial p / \partial z = 0,\\
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \qquad (15)$$

где r, φ, z — радиальная, угловая, осевая координаты, v_r, v_φ, v_z — компоненты скорости в направлении этих координат. Вследствие осевой симметрии течения производные по угловой координате и v_φ равны нулю.

Учитывая сделанные выше допущения, получаем из системы (15)

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{2\pi r \Delta\sigma}{m} = 0. \qquad (16)$$

Здесь граничные условия

$$\begin{gathered} v_r = 0 \text{ при } z = 0,\\ \partial v_r / \partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = \delta(t); \end{gathered} \qquad (17)$$

начальное условие

$$r = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (18)$$

Отсюда получим

$$r = (4\Delta\sigma m / \pi\mu\rho)^{1/4} t^{1/4}. \qquad (19)$$

Полученные соотношения в целом аналогичны соотношениям [1], имеется лишь небольшое различие в численных коэффициентах. Эти соотношения удовлетворительно согласуются с рядом экспериментальных данных [3, 6, 7].

Предлагаемый общий подход позволяет исследовать разнообразные случаи растекания, в том числе и такие, когда одно или несколько из указанных выше условий не выполнены. Рассмотрим, например, случай растекания толстых слоев, когда движение жидкости происходит в основном за счет уменьшения потенциальной энергии ΔW_g при понижении центра тяжести слоя. Тогда движущая сила растекания $F_g = -\partial(\Delta W_g) / \partial x$. Пренебречь силой F_s можно, если $F_g \gg F_s$, что выполняется при

$$Q \gg (2\Delta\sigma\rho / g)^{1/2}, \qquad (20)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Системы уравнений (1) и (15) справедливы при $\delta \ll l$, поэтому приводимое ниже решение для толстых слоев применимо, если

$$(2\Delta\sigma / \rho g)^{1/2} \ll \delta \ll l. \qquad (21)$$

При одномерном растекании

$$\frac{2}{m} F_g = \frac{mg}{4x^2\rho a}. \qquad (22)$$

Из системы уравнений (1) получим

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{mg}{4x^2\rho a} = 0. \qquad (23)$$

Решая это уравнение с граничными условиями (9), (10) и начальным условием (13), получим

$$x = (5m^3g / 32\mu a^3\rho^2)^{1/5}t^{1/5}. \tag{24}$$

В случае двухмерного растекания

$$\frac{1}{m} F_g = \frac{mg}{\rho\pi r^3}. \tag{25}$$

Тогда из системы (15) получим уравнение

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{mg}{\rho\pi r^3} = 0, \tag{26}$$

интегрирование которого с условиями (17), (18) дает

$$r = (4m^3g / \pi^3\rho^2\mu)^{1/8}t^{1/8}. \tag{27}$$

Действительно, на системе ртуть — свинец было найдено, что кинетика растекания тонких слоев ($Q \ll (2\Delta\sigma\rho / g)^{1/2}$) описывается соотношением $r \sim t^{1/4}$, а для толстых слоев ($Q \gg 2\Delta\sigma\rho / g^{1/2}$) $r \sim t^{1/8}$.

Институт физической химии
Академии наук СССР

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Д. Щукин, Ю. В. Горюнов и др., Колл. журн., 35, 108 (1963). [2] В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, 1959. [3] С. Р. де Гроот, Термодинамика необратимых процессов, М., 1956. [4] Б. В. Дерягин, ДАН, 51, 357 (1946). [5] Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, «Наука», 1969. [6] Ю. В. Сорокин, В. В. Хлынов, О. А. Есин, Сборн. Поверхностные явления в расплавах, Киев, 1968, стр. 359. [7] И. П. Гребенник, А. Г. Тонкопряд, Укр. физ. журн., 16, № 6, 943 (1971).