

УДК 517.949.2

МАТЕМАТИКА

Р. Г. КОПЛАТАДЗЕ

О СУЩЕСТВОВАНИИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

(Представлено академиком И. Н. Векун 21 VII 1972)

В настоящей заметке приводятся некоторые предложения о существовании колеблющихся решений дифференциального уравнения

$$u''(t) = f(t, u(\tau_1(t)), \dots, u(\tau_n(t)), u'(\tau_1(t)), \dots, u'(\tau_n(t))). \quad (1)$$

Эти предложения являются специфическими для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, ибо при $\tau_i(t) \equiv t$, $i = 1, \dots, n$, они теряют смысл.

Всюду в дальнейшем предполагается, что функция $f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ определена в области $0 \leq t < +\infty$, $-\infty < x_i, y_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяет локальным условиям Каратеодори и

$$f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)x_1 > 0 \quad \text{при} \quad x_1 \neq 0^*,$$

а функции $\tau_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны в промежутке $[0, +\infty)$, $\tau_i(t) < t$ при $t \in [0, +\infty)$, $\tau_i(t) \leq \tau_1(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau_i(t) = +\infty$, $i = 1, \dots, n$.

Функцию $u(t)$ назовем правильным решением уравнения (1), если она является решением этого уравнения на некотором промежутке $[t_0, +\infty)$ и $u(t) \neq 0$ при $t \in [a, +\infty)$ для любого $a \in [t_0, +\infty)$.

Правильное решение уравнения (1) назовем колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, а в противном случае — неколеблющимся.

Введем следующее

Определение. Будем говорить, что уравнение (1) обладает свойством А, если каждое правильное решение этого уравнения является либо колеблющимся, либо монотонным и неограниченным. При этом существуют решения обоих типов.

Теорема 1. Пусть найдется такая функция $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$, определенная в области $0 \leq t < +\infty$, $-\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty$ и удовлетворяющая локальным условиям Каратеодори, что

$$0 \leq \varphi(t, x_1, \dots, x_n) \leq \varphi(t, z_1, \dots, z_n) \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad x_i z_i \geq 0, \quad (2)$$

$$x_i x_i \geq 0, \quad |x_i| < |z_i|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть, кроме того, на множестве

$$D = \{(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n): 0 \leq t < +\infty, x_i x_i \geq 0, |x_i| \geq |x_1|,$$

$$x_i y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n\}$$

соблюдается неравенство

$$f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \operatorname{sign} x_1 \geq \varphi(t, x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

* В случае, когда $f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)x_1 \leq 0$, вопрос о колеблемости решений уравнения (1) рассматривается в (1-4).

и при любом $t_0 \in [0, +\infty)$

$$\sup \{\rho_j(t_0; t^*) : t^* > t_0\} = +\infty, \quad j = 0, 1,$$

где $\rho_j(t, t^*)$ — верхнее решение задачи

$$\frac{d\rho}{dt} = -\varphi(t, (-1)^j(t - \tau_1(t))\rho, \dots, (-1)^j(t - \tau_n(t))\rho), \quad \rho(t^*) = 0.$$

Тогда уравнение (1) обладает свойством А.

Следствие. Пусть в области D соблюдается неравенство

$$f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \operatorname{sign} x_1 \geq g(y_1, \dots, y_n) \sum_{i=1}^n a_i(t) \prod_{j=1}^{m_i} |x_j|^{\lambda_{ij}}, \quad (4)$$

где $\lambda_{ij} \geq 0$, $j = 1, \dots, m_i$, $m_i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < 1$, $i = 1, \dots, n$, функция $g(y_1, \dots, y_n)$ непрерывна и положительна в области $-\infty < y_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, а функции $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$.

Тогда условие

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} a_i(t) \prod_{j=1}^{m_i} (t - \tau_j(t))^{\lambda_{ij}} dt = +\infty$$

достаточно для того, чтобы уравнение (1) обладало свойством А.

Теорема 2. Пусть функция $\tau_1(t)$ абсолютно непрерывна, $0 \leq \tau_1'(t) \leq 1$ при $0 \leq t < +\infty$ и найдется такая функция $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая локальным условиям Каратеодори и условию (2), что на множестве D соблюдается неравенство (3) и при любом $t_0 \in [0, +\infty)$ имеем

$$\sup \{\rho_j(t_0; t^*) : t^* > t_0\} = +\infty, \quad j = 0, 1,$$

где $\rho_j(t; t^*)$ — верхнее решение задачи

$$\frac{d\rho}{dt} = -(t - \tau_1(t))^\alpha \varphi(t, (t - \tau_1(t))^{1-\alpha} \rho, \dots, (t - \tau_1(t))^{1-\alpha} \rho), \quad \rho(t^*) = 0,$$

а $\alpha \in [0, 1]$.

Тогда уравнение (1) обладает свойством А.

Следствие. Пусть функция $\tau_1(t)$ абсолютно непрерывна, $0 \leq \tau_1'(t) \leq 1$ при $0 \leq t < +\infty$ и на множестве D соблюдается неравенство

$$(4), \text{ где } \lambda_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, m_i, m_i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть далее найдется такое число $\alpha \in [0, 1]$, что

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} a_i(t) (t - \tau_1(t))^{\lambda_i(1-\alpha)+\alpha} dt = +\infty.$$

Тогда уравнение (1) обладает свойством А.

Теорема 3. Пусть функция $\tau_1(t)$ абсолютно непрерывна, $0 \leq \tau_1'(t) \leq 1$ при $0 \leq t < +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tau_1(t)}{t} < 1$ и в области $0 \leq t < +\infty$, $-\infty < x_i, y_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, соблюдается неравенство

$$g_1(y_1, \dots, y_n) \sum_{i=1}^n a_i(t) \prod_{j=1}^{m_i} |x_j|^{\lambda_{ij}} \leq f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \operatorname{sign} x_1 \leq \\ \leq g_2(y_1, \dots, y_n) \sum_{i=1}^n a_i(t) \prod_{j=1}^{m_i} |x_j|^{\lambda_{ij}},$$

где $\lambda_{ij} \geq 0$, $j = 1, \dots, m_i$, $m_i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < 1$, $i = 1, \dots, n$, функции $g_k(y_1, \dots, y_n)$, $k = 1, 2$, непрерывны и положительны в области $-\infty < y_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, а функции $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$.

Тогда условие

$$\int_0^{+\infty} t \sum_{i=1}^n a_i(t) dt = +\infty$$

необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (1) обладало свойством А.

Теорема 4. Пусть в области $0 \leq t < +\infty$, $-\infty < x_i, y_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, соблюдается неравенство

$$0 \leq f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \operatorname{sign} x_1 \leq \sum_{i=1}^n a_i(t) \prod_{j=1}^{m_i} |x_j|^{\lambda_{ij}},$$

где $\lambda_{ij} \geq 0$, $j = 1, \dots, m_i$, $m_i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < 1$, $i = 1, \dots, n$, а функции $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$.

Если, кроме того, соблюдается условие

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\gamma^*(t) - t) \int_t^{\gamma^*(t)} \sum_{i=1}^n a_i(s) ds < +\infty,$$

где

$$\gamma^*(t) = \sup \{s: \tau_1(s) < t\},$$

то уравнение (1) имеет правильное ограниченное решение. При этом любое колеблющееся решение является ограниченным.

Следствие. Пусть функция $a(t)$ положительна и суммируема на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} a(t) dt = +\infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+\Delta} a(s) ds < +\infty.$$

Тогда уравнение

$$u''(t) = a(t) |u(t - \Delta)|^\lambda \operatorname{sign} u(t - \Delta),$$

где $0 < \lambda < 1$ и $\Delta = \operatorname{const} > 0$, обладает свойством А и все его колеблющиеся решения являются ограниченными.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
11 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. М. Одарич, В. М. Шевело, Доп. АН УРСР, А, № 11, 1027 (1967). ² О. М. Одарич, Доп. АН УРСР, А, № 8, 712 (1968). ³ Н. Е. Gollwitzer, J. Math. Anal. Appl., 26, № 2, 385 (1969). ⁴ Р. Г. Коплатадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 60, № 2, 269 (1970).