Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 5

УДК 517.9 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Н. САМОХИН

О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 20 X 1972)

Псевдопластическая жидкость является одной из моделей аномально вязких, неньютоновских жидкостей. При обтекании твердых тел в таких жидкостях, так же как и в жидкостях с обычными свойствами, образуется пограничный слой. Движение псевдопластической жидкости в пограничном слое описывается системой уравнений, аналогичной системе Прандтля. Вывод этих уравнений и математическая постановка задач даны, например, в книге [1].

Нестационарное плоскопараллельное симметрическое течение псевдопластической жидкости в пограничном слое описывается системой вида

$$u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu(|u_y|^{n-1}u_y)_y, \quad 0 < n < 1, \quad u_x + v_y = 0, \quad (1)$$

в области $D_X\{0 \leqslant t < \infty, 0 \leqslant x \leqslant X, 0 \leqslant y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = v_0(t, x), \quad u \to U(t, x) \quad (2)$$

при $y \to \infty$.

Здесь $U(t, x)$ — заданная продольная компонента скорости внешнего течения, $U(t, 0) = 0$, $U(t, x) > 0$ при $x > 0$, u и v — компоненты скорости движения жидкости в пограничном слое, ν — некоторая постоянная, зависящая от свойств жидкости, u_0 и v_0 — заданные функции. Мы будем предполагать, что $U(t, x) = xV(t, x)$, $V > 0$, $v_0(t, x) = x^{(n-1)/(n+1)}v_1(t, x)$, V и v_1 — ограниченные функции.

Задачу (1), (2) сведем к задаче для одного дифференциального уравнения с частными производными. С этой целью в задаче (1), (2) перейдем к новым независимым переменным

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = u / U \quad (3)$$

и введем новую неизвестную функцию

$$w(\tau, \xi, \eta) = |u_y|^{n-1}u_y / x^{(n-1)/(n+1)}U. \quad (4)$$

В результате система (1) с условиями (2) сведется к уравнению

$$\nu n V^{(1-n)/n} w^2 |w|^{(1-n)/n} w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta x V w_\xi + A w_\eta + B w = 0 \quad (5)$$

в области $\Omega_X\{0 \leqslant \tau < \infty, 0 \leqslant \xi \leqslant X, 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$ с условиями

$$w|_{\tau=0} = w_0(\xi, \eta) = |u_{0y}|^{n-1}u_{0y} / x^{(n-1)/(n+1)}U, \quad w|_{\eta=1} = 0,$$

$$(\nu w |w|^{(1-n)/n} w_\eta - v_1 w |w|^{(1-n)/n} + C)|_{\eta=0} = 0; \quad (6)$$

$$A=(\eta^2-1)(V+\xi V_x)+(\eta-1)V_t/V, \quad B=-\eta\left(\frac{2n}{n+1}V+\xi V_x\right)-V_t/V,$$

$$C=V^{(n-1)/n}(V+\xi V_x+V_t/V).$$

При некоторых предположениях относительно функций V и v_1 задача (5), (6) имеет такое решение w, при котором существует преобразование переменных, обратное преобразованию (3), (4). Это позволяет доказать существование решения задачи (1), (2) и установить некоторые его свойства, исходя из свойств решения задачи (5), (6).

Существование решения задачи (5), (6) докажем на основе метода прямых. Для произвольной функции $f(\tau, \xi, \eta)$ через $f^{k,l}(\eta)$ обозначим $f(kh, lh, \eta)$, где $h=\mathrm{const}>0$. Уравнение (5) с условиями (6) заменим системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu n(V^{k,l})^{(1-n)/n}(w^{k,l})^2|w^{k,l}|^{(1-n)/n}w^{k,l}_{\eta\eta}-\frac{w^{k,l}-w^{k-1,l}}{h}-\eta lhV^{k,l}\frac{w^{k,l}-w^{k,l-1}}{h}+$$
$$+A^{k,l}w^{k,l}_\eta+B^{k,l}w^{k,l}=0, \quad k=1,2,\ldots, \quad l=0,1,\ldots,[X/h], \tag{7}$$

на отрезке $0\leqslant\eta\leqslant1$ с условиями

$$w^{0,l}(\eta)=w_0(lh,\eta), \quad w^{k,l}(1)=0,$$
$$(\nu w^{k,l}|w^{k,l}|^{(1-n)n}w^{k,l}_\eta-v_1^{k,l}w^{k,l}|w^{k,l}|^{(1-n)/n}+C^{k,l})|_{\eta=0}=0. \tag{8}$$

Далее всюду C_i и M_i — положительные постоянные, не зависящие от h. При решении задачи (7), (8) используется следующий результат.

Лемма 1. *Предположим, что* $V(t, 0)=a=\mathrm{const}>0$, $v_1(t, 0)=b=\mathrm{const}$. *Дифференциальное уравнение*

$$\nu na^{(1-n)/n}Y^{(1+n)/n}Y_{\eta\eta}+(\eta^2-1)aY_\eta-\eta\frac{2na}{n+1}Y=0 \tag{9}$$

на отрезке $0\leqslant\eta\leqslant1$ *с условиями*

$$Y(1)=0, \quad (\nu Y^{1/n}Y_\eta-bY^{1/n}+a^{(2n-1)/n})|_{\eta=0}=0 \tag{10}$$

имеет решение, обладающее следующими свойствами:

$$M_1(1-\eta)^{2n/(n+1)}\leqslant Y\leqslant M_2(1-\eta)^{2n/(n+1)},$$
$$-M_3(1-\eta)^{(n-1)/(n+1)}\leqslant Y_\eta\leqslant -M_4(1-\eta)^{(n-1)/(n+1)},$$
$$-M_5\leqslant Y^{1/n}Y_{\eta\eta}\leqslant -M_6.$$

Лемма 2. *Предположим, что* $U_x>0$ *при* $0\leqslant x\leqslant X$, *выполнено предположение леммы 1, функции* V, V_x, v_1, v_{1x}, A_x, B_x, C_x *ограничены*, $|V_t|\leqslant M_7x$, $|V_t/V|\leqslant M_8x$, $|A_t|\leqslant M_9x$, $|B_t|\leqslant M_{10}x$, $|c_t|\leqslant M_{11}x$, $v_{1t}\geqslant -M_{12}x$, $Ye^{-M_{13}\xi}\leqslant w_0\leqslant Ye^{M_{14}\xi}$, $|w_{0\xi}|\leqslant M_{15}(1-\eta)^{2n/(n+1)}$, w_0 *имеет непрерывную производную по* η *при* $0\leqslant\eta<1$, $Y_\eta e^{M_{16}\xi}\leqslant w_{0\eta}\leqslant Y_\eta e^{-M_{17}\xi}$, $-M_{18}(1-\eta)^{2n/(n+1)}\leqslant \nu nV^{(1-n)/n}(0, x)w_0^{(1+n)/n}w_{0\eta\eta}+A(0, x, \eta)w_{0\eta}+B(0, x, \eta)w_0\leqslant M_{19}x(1-\eta)^{2n/(n+1)}$,

$$(\nu w_0^{1/n}w_{0\eta}-v_1w_0^{1/n}+C)|_{\eta=0,\,\tau=0}=0.$$

Тогда при $0\leqslant lh\leqslant X_0$, *где* X_0 *зависит от* V, v_1 *и* w_0, *и при* $0\leqslant kh<\infty$ *система* (7) *с условиями* (8) *имеет решение* $w^{k,l}(\eta)$, *обладающее непрерывной производной третьего порядка по* η *и удовлетворяющее неравенствам*

$$Ye^{-c_1lh}\leqslant w^{k,l}\leqslant Ye^{c_2lh},$$
$$-c_3(1-\eta)^{2n/(n+1)}\leqslant (w^{k,l}-w^{k-1,l})/h\leqslant c_4lh(1-\eta)^{2n/(n+1)},$$

$$|(w^{k,l} - w^{k,l-1})/h| \leqslant c_5 Y, \quad Y_\eta e^{c_6 lh} \leqslant w_\eta^{k,l} \leqslant Y_\eta e^{-c_7 lh},$$
$$-c_8 \leqslant (w^{k,l})^{1/n} w_{\eta\eta}^{k,l} \leqslant -c_9,$$

где Y — решение задачи (9), (10).

Доказательство этой леммы основано на методах, примененных в леммах 3—5 работы ([2]). Из леммы 2 вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения леммы 2. Тогда в области Ω_{X_0}, где X_0 зависит от V, v_1, w_0, существует решение w задачи* (5), (6), *обладающее следующими свойствами: w непрерывна в Ω_{X_0}, $Ye^{-c_1\xi} \leqslant w \leqslant Ye^{c_2\xi}$, w_η непрерывна по η при $\eta < 1$, $Y_\eta e^{c_6\xi} \leqslant w_\eta \leqslant Y_\eta e^{-c_7\xi}$, существуют обобщенные производные w_τ, w_ξ, $w_{\eta\eta}$ такие, что*

$$-c_3(1-\eta)^{2n/(n+1)} \leqslant w_\tau \leqslant c_4\xi(1-\eta)^{2n/(n+1)}, \quad |w_\xi| \leqslant c_5 Y,$$
$$-c_8 \leqslant w^{1/n} w_{\eta\eta} \leqslant -c_9.$$

В области Ω_{X_0} функция w удовлетворяет почти всюду уравнению (5) *и условиям* (6). *Решение задачи* (5), (6), *обладающее указанными свойствами, единственно.*

Из свойств функции w, указанных в теореме 1, вытекает, что существует преобразование, обратное преобразованию (3), (4). На основе этого из теоремы 1 выводим следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что $U(t, x) = xa + x^2 a_1(t, x)$, где $a = \mathrm{const} > 0$, $a_1(t, x)$ имеет ограниченные производные второго порядка; $v_0(t, x) = x^{(n-1)/(n+1)}(b + xb_1(t, x))$, где $b = \mathrm{const}$, $b_1(t, x)$ имеет ограниченные производные первого порядка, a_1 и b_1 ограничены. Пусть $u_0(x, y)$ такова, что функция $w_0(\xi, \eta) = |u_{0y}|^{n-1} u_{0y} / x^{(n-1)/(n+1)} U$ удовлетворяет условиям леммы* 2.

Тогда при некотором X_0, зависящем от свойств функций U, u_0 и v_0, в области D_{X_0} существует и единственно решение u, v задачи (1), (2), *обладающее следующими свойствами: $u > 0$ при $y > 0$ и $x > 0$, $u \to U$ при $y \to \infty$, $u_y > 0$ при $y \geqslant 0$, u/U, $u_y^n / x^{(n-1)/(n+1)} U$ ограничены и непрерывны в D_{X_0}, $u_y^n / x^{(n-1)/(n+1)} U \to 0$ при $y \to \infty$, u_y, u_x, u_{yy}, u_t, v_y ограничены и непрерывны по y в D_{X_0}, v непрерывна по y при $x > 0$ и ограничена при ограниченных y и $x > 0$. Уравнения системы* (1) *удовлетворяются почти всюду в D_{X_0}. Имеют место неравенства*

$$x^{(n-1)/(n+1)} UY(u/U) e^{-c_1 x} \leqslant u_y^n \leqslant x^{(n-1)/(n+1)} UY(u/U) e^{c_2 x},$$
$$U - U\left(M_1^{1/n} \frac{1-n}{n+1} e^{-c_1 x/n} x^{(n-1)/n(n+1)} U^{(1-n)/n} y + 1\right)^{(n+1)/(n-1)} \leqslant u \leqslant$$
$$\leqslant U - U\left(M_2^{1/n} \frac{1-n}{n+1} e^{c_2 x/n} x^{(n-1)/n(n+1)} U^{(1-n)/n} y + 1\right)^{(n+1)/(n-1)}.$$

Заметим, что условиям, которые в теореме 2 налагаются на функцию $u_0(x, y)$, удовлетворяет решение стационарной задачи, соответствующей задаче (1), (2).

Применяя методы работы ([2]), получаем некоторые результаты, касающиеся устойчивости решения задачи (1), (2). Предположим, что функции $U = xV$, $v_0 = x^{(n-1)/(n+1)} v_1$, $u_0(x, y)$ и возмущенные функции $\tilde{U} = x\tilde{V}$, $\tilde{v}_0 = x^{(n-1)/(n+1)} \tilde{v}_1$, $\tilde{u}_0(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, а u, v и $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ — решения задачи (1), (2), соответствующие этим данным.

Теорема 3. *Пусть функции*

$$V - \tilde{V}, \quad V_x - \tilde{V}_x, \quad V_t / V - \tilde{V}_t / \tilde{V}, \quad v_1 - \tilde{v}_1 \tag{11}$$

равны нулю при $t \geqslant t_0$, где $t_0 = \mathrm{const} > 0$.

Тогда в области D_{x_0} при $0 \leqslant y \leqslant y_0 < \infty$

$$|u / V - \tilde{u} / \tilde{V}| \leqslant x M_{20} e^{-\alpha_0 t},$$

где $\alpha_0 = \text{const} > 0$.

Теорема 4. *Если функции* (11) *по модулю не превосходят* ε, *а* V, $\tilde{V}$, u_0, $\tilde{u}_0$ *таковы, что* $|w_0 - \tilde{w}_0| < \varepsilon$, *то в области* D_{x_0} *при* $y \leqslant y_0 < \infty$ *и при всех* t

$$|u / V - \tilde{u} / \tilde{V}| \leqslant x M_{21} \varepsilon.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. П. Шульман, Б. М. Берковский, Пограничный слой неньютоновских жидкостей, Минск, 1966. [2] О. А. Олейник, УМН, 23, 3 (1968).