

С. А. ТЕРСЕНОВ

О СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 II 1972)

Как известно, задача Коши для гиперболических уравнений с данными на линии вырождения не является корректной. В работе ⁽¹⁾ для уравнений второго порядка с нехарактеристическим вырождением было указано достаточное условие для корректности задачи Коши; это условие было несколько ослаблено в работе ⁽³⁾. В дальнейшем более общие условия были предложены в работах ⁽⁶⁻¹⁴⁾. Ряд работ ⁽⁵⁻⁹⁾ посвящен также задаче Коши для уравнений с характеристическим вырождением.

В настоящей работе исследуется одна корректная постановка задачи Коши, которая является обобщением и продолжением исследований в ⁽⁶⁻⁹⁾.

Рассмотрим симметрическую гиперболическую систему уравнений

$$Au_y + Bu_x + Cu = F \quad (1)$$

при $y \geq 0$, которая вырождается на прямой $y = 0$. A, B, C — квадратные матрицы порядка n и вектор F — заданные в верхней полуплоскости $y \geq 0$ функции.

1. Предположим, что B, C, F имеют при $y \geq 0$ непрерывные производные по y , а по x непрерывные производные до $2p + 2$ порядка (число p определяется ниже). Пусть $\det B(x, y) \neq 0$ для $y \geq 0$, A — диагональная матрица с элементами $a_k = y$, $k = 1, 2, \dots, r$, $a_k = y^{\alpha_k}$, $k = r + 1, \dots, n$, $0 \leq \alpha_k < 1$. Через A_2 обозначим диагональную матрицу с элементами $a_k = y^{\alpha_k}$. Представим B и C в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3^* & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_4 & C_2 \end{pmatrix},$$

где B_1, C_1 — матрицы порядка $r \times r$, а B_2, C_2 — порядка $(n - r) \times (n - r)$.

Будем считать, что любая характеристика системы (1), выходящая из какой-либо точки (x_0, y_0) , $y_0 > 0$, доходит до линии $y = 0$. Из этого условия и того, что $\det B(x, y) \neq 0$, легко видеть, что $r \leq [n/2]$ — целой части $n/2$ и $B_1(x, 0) = 0$.

Предположим, что $C_1(x, 0)$ — симметрическая матрица, $\gamma_1(x), \dots, \gamma_r(x)$ — ее собственные значения, а $q(x)$ — матрица, осуществляющая подобие матрицы $C_1(x, 0)$ диагональной матрице с элементами $\gamma_i(x)$.

В этом пункте будем полагать, что

$$\max \alpha_i + \gamma_i(x) < 1. \quad (2)$$

Пусть при фиксированном x

$$1 - \gamma_{k_1}(x) \leq 1 - \gamma_{k_2}(x) \leq \dots \leq 1 - \gamma_{k_r}(x).$$

Обозначим через P_i целую часть $1 - \gamma_{k_i}(x)$ и пусть

$$l_0 = P_1 = \dots = P_{\sigma_1-1}, \quad l_1 = P_{\sigma_1} = \dots = P_{\sigma_2-1}, \dots \\ l_s = P_{\sigma_s} = \dots = P_r, \quad l_0 < l_1 < \dots < l_s.$$

Подберем числа $m_1, \dots, m_s$ так, чтобы $l_{k+1} > m_{k+1}(1 - \alpha) \geq l_k$, где $\alpha = \max \alpha_i$.

Рассмотрим уравнение

$$y\omega_y + C_1(x, 0)\omega = f, \quad (3)$$

и пусть X — матричное решение однородного уравнения, соответствующего (3) при начальных условиях: $X(x, 1) = E$ — единичная матрица. Обозначим через $\omega_j^{(1)}$ вектор с компонентами вектора $qX^{-1}\omega$, имеющими номера k_i , $i = 1, \dots, m_j$, а $\omega_j^{(2)}$ — вектор с остальными компонентами того же вектора; $j = 0, 1, \dots$; $m_0 = 0$. Пусть $\omega = Q_i(f)$, $i = m_j + 1, \dots, m_{j+1}$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\omega_j^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \omega_j^{(2)}(x, 1) = 0.$$

Если же $i \geq m_{s+1} + 1$, то $Q_i(f)$ обозначает решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $\omega(x, 0) = 0$. Наконец, пусть $\theta(f)$ — решение уравнения

$$A_2\theta_y + C_2\theta = f \quad (4)$$

при условии $\theta(x, 0) = 0$.

Теперь определим число p . Пусть матрица T осуществляет подобие матрицы $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ диагональной матрице, а δ_{is} — общий элемент матрицы

$$1/2 T^{-1} Z T - y T^{-1} A^{-1/2} C A^{-1/2} T,$$

где Z — диагональная матрица, первые r элементов которой равны единице, а остальные равны $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ соответственно. Число p определяется неравенством

$$\max_i \sum_{s=1}^n \max_{(x, y)} |\delta_{is}| < \frac{1}{2} + p. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что наименьшее целое число p , удовлетворяющее неравенству

$$\max_{s, x} \left| \frac{1}{2} - \gamma_s \right| + \frac{\alpha}{2} + \max_{l, s, x} |\mu_l - \mu_s| \frac{(n-1)^2}{n} < \frac{1}{2} + p,$$

будет удовлетворять условию (5), где

$$\mu_l = 1/2 \gamma_l, \quad l \leq r, \quad \mu_l = 1/2 \alpha_l, \quad l \geq r + 1.$$

Пусть $\tau(x)$ — вектор, имеющий $2p + 2$ непрерывных производных. Определим векторы

$$\Phi = \sum_{k=1}^p \Phi_k, \quad \Psi = \sum_{k=1}^p \Psi_k,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_k &= Q_k(\varphi_k), \quad \Psi_k = \theta(\psi_k), \\ \varphi_1 &= F_1 - B_1(X_x \tau_1 + X \tau'_1) - C_5 X \tau_1 - B_3 \tau'_2 - C_3 \tau_2, \\ \psi_1 &= F_2 - B_2 \tau'_2 - B_3^*(X_x \tau_1 + X \tau'_1) - C_4 X \tau_1 - C_2 \tau_2 - B_3^* \Phi_{1x} - C_4 \Phi_1, \\ \varphi_k &= -C_5 \Phi_{k-1} - B_1 \Phi_{k-1, x} - B_3 \Psi_{k-1, x} - C_3 \Psi_{k-1}, \\ \psi_k &= -B_2 \Psi_{k-1, x} - B_3^* \Phi_{kx} - C_4 \Phi_k, \end{aligned}$$

τ_1 — вектор с первыми r компонентами вектора τ , а τ_2 — вектор с остальными $n - r$ компонентами, F_1 — вектор с первыми r компонентами вектора F , а F_2 — вектор с остальными $n - r$ компонентами.

Обозначим через Ω квазидиагональную матрицу (X, E) , E — единичная матрица порядка $n - r$, а через G — вектор (Φ, Ψ) . Будем говорить,

что решение U уравнения (1) принадлежит классу $\Sigma_p(X, G)$, если $\Omega^{-1}(U - G)$ для $y \geq 0$ имеет непрерывные производные по x $2p + 2$ порядка, где в G $\tau(x) = U(x, 0)$.

Теорема 1. *Существует единственное решение $U \in \Sigma_p(X, G)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\Omega^{-1}(U - G)|_{t=0} = \tau(x). \quad (6)$$

Введением новой искомой функции

$$U = \Omega\tau + G + A^{-\frac{1}{2}}TV$$

задача редуцируется, как и в ⁽⁶⁻⁹⁾, к системе интегральных уравнений Вольтерра, ядро которой имеет особенность первого порядка при $y = 0$. В силу выбора p к этой системе применим метод последовательных приближений.

2. Пусть n — четное число, $2r = n$ и

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_r = \gamma(x) > 1. \quad (7)$$

Для простоты будем считать, что $\alpha_i = 0$.

Пусть

$$H = \begin{pmatrix} 0 & X \\ yX & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. 1) *Существует единственное решение U уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$a) H^{-1}U = V \in \Sigma_q(y^{-1}X^{-1}, G_0),$$

$$б) \Omega_0^{-1}(V - G_0)|_{y=0} = \tau(x); \quad (8)$$

2) *существует единственное ограниченное решение U уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$E_0U|_{y=0} = E_0\tau(x), \quad (9)$$

где Ω_0 — квазидиагональная матрица $(y^{-1}X^{-1}, E)$, $E_0(0, E)$, E — единичная матрица порядка r , а q , G_0 строятся аналогично p , G только для системы относительно функции $V = H^{-1}U$.

Теорема 2 редуцируется к теореме 1 заменой $V = H^{-1}U$.

3. Пусть теперь в системе (1) $\det A(x, y) \neq 0$ при $y \geq 0$, $\det B(x, y) \neq 0$ при $y > 0$, а $\det B(x, 0) = 0$. Матрица B положительно определенная. Предположим, что матрица

$$\Gamma(x, y) = yB^{\frac{1}{2}}A^{-1}CB^{-\frac{1}{2}} - y(B^{\frac{1}{2}})yB^{-\frac{1}{2}}$$

непрерывна при $y \geq 0$ и пусть матрица T осуществляет подобие матрицы $B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}$ диагональной матрице. Обозначим через ϵ_{ij} общий элемент матрицы $T^{-1}\Gamma T$ и пусть

$$\max_i \sum_{j=1}^n \max_{(x, y)} |\epsilon_{ij}| < p.$$

Если коэффициенты уравнения (1) по y непрерывно дифференцируемы, а по x имеют непрерывные производные до $2p + 2$ порядка, то имеет место

Теорема 3. *Существует единственное решение U системы (1), удовлетворяющее условию*

$$U(x, 0) = \tau(x). \quad (10)$$

З а м е ч а н и е. Постановка задачи и результаты работы ⁽¹⁴⁾, вообще говоря, не верны. Система уравнений

$$yu_{1y} = u_{1x} + u_{2x}, \quad yu_{2y} = u_{1x} - u_{2x}$$

удовлетворяет всем условиям в ⁽¹⁴⁾. Но, построив общее решение, легко видеть, что задача с начальными данными $u_i(x, 0) = \tau_i(x)$ имеет решение только в случае, когда $\tau_i(x)$ постоянны, вопреки утверждению ⁽¹⁴⁾, что эта задача имеет решение при любых достаточно гладких $\tau_i(x)$.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
29 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Gellerstedt, Arkiv mat. astr. och fysik, 25A, № 29 (1937). ² Н. С. Безин, Матем. сборн., 24 (66), № 2, 301 (1949). ³ M. H. Protter, Canad. J. Math., 6, № 4, 542 (1954). ⁴ Р. И. Карапетян, ДАН, 106, № 6, 963 (1956). ⁵ Ч и Минь-ю, Acta Math. Sinica, 8, № 4, 521 (1958). ⁶ С. А. Терсенов, ДАН, 129, № 2, 276 (1959). ⁷ С. А. Терсенов, Сиб. матем. журн., 2, № 6, 913 (1961). ⁸ С. А. Терсенов, ДАН, 155, № 2, 285 (1964). ⁹ С. А. Терсенов, ДАН, 196, № 5, 1031 (1971). ¹⁰ О. А. Олейник, ДАН, 169, № 3, 525 (1966). ¹¹ О. А. Олейник, УМН, 1, 229 (1969). ¹² А. В. Нерсесян, Дифференциальные уравнения, 4, № 9, 1658 (1968). ¹³ А. В. Нерсесян, ДАН, 181, № 4, 798 (1968). ¹⁴ А. В. Нерсесян, ДАН, 198, № 2, 289 (1971).