

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Г. М. ХЕНКИН

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОЛИЭДР ГОЛОМОФНО НЕ ЭКВИВАЛЕНТЕН СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 10 X 1972)

А. Пуанкаре в 1907 г. обнаружил, что бидиск $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ и шар $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ голоморфно не эквивалентны.

Одно из доказательств теоремы А. Пуанкаре основано на вычислении и сравнении групп автоморфизмов бидиска и шара. Далеко идущее обобщение этого доказательства привело к полной классификации однородных областей в $\mathbb{C}^n$ (см. (1)).

Другое доказательство теоремы А. Пуанкаре основано на сравнении инвариантных метрик в бидиске и шаре. Развивая этот подход, удается освободиться от использования в нем групповой структуры рассматриваемых областей, что приводит, например, к доказательству голоморфной неэквивалентности любого аналитического полиэдра общего положения и любой строго псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^n$.

Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, т. е. $D = \{z \in \Omega: \rho(z) < 0\}$, где $\rho(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, строго плюрисубгармоническая функция в области $\Omega \supset \bar{D}$, причем $\text{grad } \rho(z) \neq 0$ в точках $z \in \partial D$.

Обозначим через $C_D(z', z'')$ инвариантное расстояние Каратеодори между точками z' и z'' области D . Имеем

$$C_D(dz) = C_D(z, z + dz) = \sup_{\substack{f \in H(D) \\ |f| < 1}} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z) \cdot dz \right|. \quad (1)$$

Для точки $\zeta \in \partial D$ обозначим через C_ζ комплексную касательную плоскость к ∂D в точке ζ , а через N_ζ — комплексную прямую, ортогонально пересекающую C_ζ в точке ζ . Для каждой точки $z \in D$, достаточно близкой к ∂D , на ∂D определена единственная точка $\zeta(z)$, для которой $|z - \zeta(z)| = \delta(z, \partial D)$, где $\delta(z, \partial D)$ — расстояние от $z \in D$ до ∂D .

Лемма 1*. Для любой точки $z \in D$, достаточно близкой к ∂D , имеют место неравенства

$$\gamma_2 \geq C_D(dz) \cdot \left(\frac{|(dz, N_{\zeta(z)})|}{\delta(z, \partial D)} + \frac{|(dz, C_{\zeta(z)})|}{\sqrt{\delta(z, \partial D)}} \right)^{-1} \geq \gamma_1,$$

где через $(dz, N_{\zeta(z)})$ и $(dz, C_{\zeta(z)})$ обозначены проекции dz на плоскости $N_{\zeta(z)}$ и $C_{\zeta(z)}$ соответственно, γ_1, γ_2 — положительные постоянные, зависящие лишь от области D .

Лемма 2**. Пусть G — произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Тогда для любой точки $z \in G$ имеет место неравенство

$$C_G(dz) \leq \sqrt{n+1} |dz| / \delta(z, \partial G).$$

* Можно показать, что справедлив аналог леммы 1 и для инвариантной метрики Бергмана, и тем самым доказать справедливость гипотезы Штейна (см. (6)), Введение).

** Мы не располагаем доказательством аналога леммы 2 для инвариантной метрики Бергмана. Только по этой причине мы пользуемся здесь метрикой Каратеодори.

Область G в C^n назовем правильной псевдовыпуклой областью, если

$$G = \{z \in \Omega: \rho_\nu(z) < 0, 1 \leq \nu \leq N\}, \quad (2)$$

где $\{\rho_\nu\}$ — вещественнозначные, дважды непрерывно дифференцируемые, плюрисубгармонические функции в области $\Omega \supset \bar{G}$, и

$$\text{rang } \{\text{grad } \rho_{\nu_1}, \dots, \text{grad } \rho_{\nu_k}\} = k, \quad 1 \leq \nu_1, \dots, \nu_k \leq N, \\ k = 1, 2, \dots, N,$$

на множестве $\{z \in \Omega: \rho_{\nu_1} = \rho_{\nu_2} = \dots = \rho_{\nu_k} = 0\}$.

Теорема 1. Пусть G — правильная псевдовыпуклая область в C^n , а D — строго псевдовыпуклая область. Пусть $W: z \rightarrow w(z)$ — биголоморфное отображение области G на область D . Тогда отображение W равномерно непрерывно в области G , при этом

$$|w(z') - w(z'')| \leq \gamma_3 |z' - z''|^{1/2},$$

где постоянная $\gamma_3 > 0$ не зависит от точек $z', z'' \in G$.

Доказательство. В силу инвариантности метрики Каратеодори имеем

$$C_D(dw(z)) = C_G(dz). \quad (3)$$

В силу леммы 1 и леммы 2 имеют место неравенства

$$C_D(dw) \geq \gamma_1 |dw| / \sqrt{\delta(w, \partial D)}, \quad w \in D, \quad (4)$$

$$C_G(dz) \leq \sqrt{n+1} |dz| / \delta(z, \partial G), \quad z \in G.$$

Из (3) и (4) вытекает оценка

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\gamma_1} \frac{\sqrt{\delta(w, \partial D)}}{\delta(z, \partial G)}. \quad (5)$$

Пусть

$$u(z) = \sup_{1 \leq \nu \leq N} \rho_\nu(z), \quad z \in G. \quad (6)$$

Из (2) и (6), пользуясь гладкостью функций $\{\rho_\nu(z)\}$, извлекаем неравенство

$$|u(z)| \leq \gamma_4 \delta(z, \partial G), \quad (7)$$

где постоянная $\gamma_4 > 0$ не зависит от $z \in G$.

Обозначим через $Z: w \rightarrow z(w)$ отображение, обратное к биголоморфному отображению $W: z \rightarrow w(z)$. Из инвариантности плюрисубгармонических функций при биголоморфных отображениях следует, что $u(z(w))$ — строго отрицательная плюрисубгармоническая функция от w в области D . Используя лемму М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева ⁽²⁾, имеем оценку

$$|u(z(w))| \geq \gamma_5 \delta(w, \partial D). \quad (8)$$

Из (5), (7) и (8) получаем неравенство

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\gamma_1} \sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma_5}} \frac{1}{\sqrt{\delta(z, \partial G)}}. \quad (9)$$

Из (9) с помощью аналога теоремы Харди — Литтлвуда (см. ⁽³⁾, стр. 399) выводим неравенство $|w(z') - w(z'')| \leq \gamma_3 |z' - z''|^{1/2}$, где постоянная $\gamma_3 > 0$ не зависит от точек z' и z'' из G . Отметим, что именно здесь мы существенно используем правильность псевдовыпуклой области (2).

Теорема доказана.

Следствие ⁽⁴⁾. Пусть G и D — две строго псевдовыпуклые области в пространстве C^n , а W — биголоморфное отображение G на D . Тогда W продолжается до гомеоморфизма между $\bar{G}$ и $\bar{D}$.

Правильную псевдовыпуклую область (2) назовем общим аналитическим полиэдром, если для любого v , $1 \leq v \leq N$, функция $\rho_v(z)$ может быть представлена в виде $\rho_v(z) = \varphi_v(F_v(z))$, где $F_v(z)$ — голоморфное отображение области Ω на область Ω' в комплексном пространстве меньшего числа переменных, а φ_v — дважды непрерывно дифференцируемая плюрисубгармоническая функция в области Ω' . Заметим, что в случае, когда $\{F_v(z)\}$ — комплекснозначные голоморфные функции, общий аналитический полиэдр превращается в обычный невырожденный аналитический полиэдр Вейля.

Теорема 2. *Любой общий аналитический полиэдр не отображается биголоморфно на строго псевдовыпуклую область.*

Набросок доказательства. Допустим, что существует биголоморфное отображение $W: z \rightarrow w(z)$ общего аналитического полиэдра $G = \{z \in \Omega: \varphi_v(F_v(z)) < 0, v = 1, 2, \dots, N\}$ на строго псевдовыпуклую область $D = \{w: \rho(w) < 0\}$. Из теоремы 1 следует, что отображение W продолжается до непрерывного отображения компакта $\bar{G}$ на компакт $\bar{D}$. Фиксируем точку $\eta \in \partial D$. Пусть точка $\zeta \in \partial G$ такова, что $w(\zeta) = \eta$.

Фиксируем индекс v , для которого $\varphi_v(F_v(\zeta)) = 0$. Рассмотрим аналитическое множество

$$A_\eta = \{z \in \partial G: F_v(z) = F_v(\zeta), \varphi_\alpha(F_\alpha(z)) < 0, \alpha \neq v\}.$$

Из условия правильности области G следует, что A_η — аналитическое многообразие положительной размерности. Пусть $A_{\eta, \zeta}$ — связанная компонента множества A_η , замыкание которой содержит точку ζ . Докажем сначала, что

$$W(A_{\eta, \zeta}) = \{\eta\}. \quad (10)$$

Пусть η^* — произвольная точка из множества $W(A_{\eta, \zeta}) \subset \partial D$. Так как область D строго псевдовыпукла, то по теореме X. Росси существует (см. (5), глава IXС) функция $f(w)$, непрерывная в $\bar{D}$, голоморфная в D и такая, что

$$|f(w)| < f(\eta^*) = 1, \quad (11)$$

для всех $w \in \bar{D}$ и $w \neq \eta^*$. Рассмотрим непрерывную на $\bar{G}$, голоморфную в G функцию $f(w(z))$. Ввиду равномерной непрерывности функция $f(w(z))$ голоморфна не только в G , но и на аналитическом многообразии $A_{\eta, \zeta} \subset \partial G$. Для точек $z \in A_{\eta, \zeta}$ имеем неравенство $|f(w(z))| \leq f(\eta^*) = f(w(\zeta^*))$, где $\zeta^* \in A_{\eta, \zeta}$. В силу принципа максимума для всех $z \in A_{\eta, \zeta}$, имеет место равенство $f(w(z)) = f(\eta^*)$. Пусть теперь $z \in A_{\eta, \zeta}$ и $|z - \zeta| \rightarrow 0$. Тогда $|f(\eta^*) - f(\eta)| = |f(w(z)) - f(w(\zeta))| \rightarrow 0$. Следовательно, $f(\eta^*) = f(\eta)$. В силу (11) получаем равенство $\eta^* = \eta$. Итак, равенство (10) доказано.

Фиксируем теперь произвольную точку $z^* \in A_{\eta, \zeta}$. Пусть $z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — отрезок прямой линии, лежащий в области G и удовлетворяющий условию

$$z(0) = z^*; \quad \delta(z(t), z^*) \leq 2\delta(z(t), \partial G), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (12)$$

Положим $w(t) = W(z(t))$. Так как $z(0) \in A_{\eta, \zeta}$, то в силу (10) имеем $w(0) = \eta$. Мы показываем далее, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \delta(w(t), \eta) &\leq \gamma_0 \sqrt{\delta(w(t), \partial D)}, \\ \delta(w(t), C_\eta) &\leq \gamma_0 \delta(w(t), \partial D), \end{aligned} \quad (13)$$

где положительная постоянная γ_0 не зависит от t , $0 \leq t \leq 1$, C_η — комплексная касательная плоскость к ∂D в точке $\eta \in \partial D$. Если выполнены неравенства (13), то из обобщенной Е. Штейном теоремы Фату (см. (6a) или (6b), теорема 9), следует, что для почти всех η на ∂D предел $\lim_{t \rightarrow 0} W^{-1}(w(t))$ зависит только от областей G, D отображения W и точки η . Но по построе-

нию $\lim_{t \rightarrow 0} W^{-1}(w(t)) = z^*$, где z^* — произвольно фиксированная точка из множества A_n . Получили противоречие.

Внося в доказательство теорем 1 и 2 некоторые усовершенствования, можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Теорема 1*. Пусть $w(z)$ — собственное голоморфное отображение правильной псевдовыпуклой области $G \subset \mathbb{C}^n$ на строго псевдовыпуклую область $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда $|w(z') - w(z'')| \leq \gamma_3 |z' - z''|^{1/2}$, где постоянная $\gamma_3 > 0$ не зависит от точек $z', z'' \in G$.

Теорема 2*. Любой общий аналитический полиэдр G не отображается голоморфно и собственнo на область D , граница ∂D которой содержит непустое открытое подмножество точек строгой выпуклости.

В случае, когда G — полидиск, а D — шар, утверждение последней теоремы доказано В. Ротштейном в 1935 г. (см. ⁽⁷⁾).

Мы называем точку $\xi \in \partial D$ точкой строгой выпуклости, если в окрестности точки ξ граница ∂D дважды гладкая и существует такой шар B , что $D \subset B$, а $\xi \in \partial B$.

Напомним здесь (⁽⁸⁾, теорема 3.1), что любая область D с дважды гладкой границей ∂D имеет на границе непустое открытое подмножество точек строгой выпуклости.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Пятецкий-Шапиро, УМН, 20, 2 (122), 3 (1965). ² М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, ДАН, 16, 151 (1937). ³ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. ⁴ Г. А. Маргулис, Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций, Харьков, 1971, стр. 137. ⁵ Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, М., 1969. ⁶ E. M. Stein, а) Bull. Am. Math. Soc., 76, 1292 (1970); б) Boundary Behavior of Holomorphic Functions of Several Complex Variables, Mathematical Notes, Princeton, 1972. ⁷ R. Remmert, K. Stein, Math. Z., 73, 159 (1960). ⁸ R. O. Wells, jr., Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 23, № 2, 347 (1969).