Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 513.6 МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР В. П. ПЛАТОНОВ, М. В. МИЛОВАНОВ

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

Пусть G — связная алгебраическая группа, определенная над полем Q рациональных чисел; Γ — некоторая арифметическая подгруппа G, т. е. подгруппа, соизмеримая с G_z (за всеми необходимыми сведениями об алгебраических и арифметических группах мы отсылаем к лекциям Бореля (1)). Естественно возникает интересная задача: выяснить, в какой мере структура G как алгебраической группы определяется абстрактной структурой группы Γ? Более точный вопрос: когда из абстрактного изоморфизма $\Gamma \leftrightarrow \Gamma'$ арифметических подгрупп Γ и Γ' алгебраических групп G и G' соответственно следует бирациональный изоморфизм групп $G \leftrightarrow G'$? Для наиболее важного класса алгебраических групп — полупростых групп эта задача недавно решена: в (2) — для групп G с условием $\operatorname{rank}_Q G > 1$; в (3) — для $\operatorname{rank}_Q G = 1$, и для $\operatorname{rank}_Q G = 0$ решение вытекает из более общих и глубоких результатов Мостова (4) о продолжении изоморфизмов равномерных дискретных подгрупп полупростых групп Ли.

Цель настоящей статьи — решение задачи в общем случае с учетом приведенных выше результатов. Точнее, мы будем рассматривать случай существенно нередуктивных групп, в частности, разрешимых, к которому теперь все сводится. Отметим влияние на нашу статью работы Мостова о дискретных подгруппах групп Ли с радикалом (5), а также большого неопубликованного мемуара Г. А. Маргулиса «Неравномерные решетки в полупростых алгебраических группах», любезно предоставленного нам автором.

В общем случае, аналогично полупростому, на G и Γ необходимо наложить следующие естественные и понятные ограничения: 1) Γ плотна в G относительно топологии Зарисского (в полупростом случае это эквивалентно отсутствию у группы G_R компактных факторов); 2) G не является почти прямым произведением над Q связных подгрупп (в противном случае, если $G = G_1 \times G_2$ — почти прямое произведение, то существуют такие арифметические подгруппы $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$, что $H_1 \times H_2$ — подгруппа конечного индекса в Γ, и, как правило, все сводится к вопросу об определяемости компонент G_1, G_2). Пусть в дальнейшем G и Γ удовлетворяют условиям 1) и 2).

Напомним, что группа G является полупрямым произведением $G = D(G) \cdot U(G)$, где $D(G)$ — некоторая максимальная Q-определенная редуктивная подгруппа G, $U(G)$ — унипотентный радикал, причем все $D(G)$ сопряжены элементом u из U_Q. Такие разложения иногда называют разложениями Шевалле. Группа D есть почти прямое произведение $D = S \cdot T$, где S — полупростая подгруппа, а T — центральный тор (понятно, что $T \cdot U$ — разрешимый радикал G). Если унипотентный радикал $U = (e)$, тогда можно считать, что G либо полупроста, либо тор. В полупростом случае G полностью определяется своей арифметической подгруппой. Если же G — тор, тогда определяемость — весьма редкое явление.

Вот первый приходящий на ум убедительный п р и м е р. Пусть K_i — неэквивалентные вещественные квадратичные расширения Q, $K_i^{(1)}$ — подгруппа элементов K_i с единичной нормой, T_i — одномерный тор с $(T_i)_Q = K_i^{(1)}$. Бесконечная циклическая подгруппа Γ_i, порожденная основной единицей K_i, будет арифметической подгруппой T_i. Все Γ_i изоморфны, но T_i и T_j при $i \neq j$ не являются Q-изоморфными.

Если же $U \neq (e)$, то ситуация оказывается иной, как показывает

Основная теорема. *Пусть унипотентный радикал группы G нетривиален. Если центры групп G и G' не содержат элементов конечного порядка, то изоморфизм φ: $\Gamma \to \Gamma'$ арифметических подгрупп $\Gamma \subset G$ и $\Gamma' \subset G'$ индуцирует бирациональный Q-изоморфизм Φ: $G \to G'$. Если, кроме того, центр разрешимого радикала G тривиален, то Φ совпадает с φ на подгруппе конечного индекса группы Γ. В общем случае группа G определяется Γ с точностью до Q-изогении.*

Замечание 1. Механизм индуцирования Φ довольно прост и выясняется в процессе доказательства. Для алгебраических групп, радикал которых содержит нетривиальный центр, совпадение Φ с φ на подгруппе конечного индекса группы Γ может не иметь места, как показывают построенные нами контрпримеры.

Замечание 2. Основная теорема и ее доказательство остаются верными, если условие 2 заменить более слабым условием: присоединенное действие редуктивной части D на алгебре Ли $L(U)$ эффективно, или, что эквивалентно, действие D на U почти эффективно. Группы G с таким свойством мы называем существенно нередуктивными.

Мы ограничимся здесь доказательством основной теоремы для случая разрешимой G; в общем случае доказательство вполне аналогично, хотя и становится сложнее. В дальнейшем под алгебраической группой мы везде будем понимать разрешимую алгебраическую группу, а ее арифметическую подгруппу, не ограничивая общности, всегда будем считать без элементов конечного порядка.

Пусть $G = T(G) \cdot U(G)$ и $G' = T(G') \cdot U(G')$ — разложения Шевалле алгебраических групп G и G'. Обозначим $\Gamma \cap T(G) = T(\Gamma)$, $\Gamma \cap U(G) = U(\Gamma)$; $\Gamma' \cap T(G') = T(\Gamma')$, $\Gamma' \cap U(G') = U(\Gamma')$. Хорошо известно, что $T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$, $T(\Gamma') \cdot U(\Gamma')$ — подгруппы конечного индекса соответственно в Γ и Γ'.

Рассмотрим сначала случай, когда центры $Z(G)$ и $Z(G')$ групп G и G' не содержат элементов конечного порядка. Это означает, что $Z(G) \subset U(G)$, $Z(G') \subset U(G')$. Изоморфизм $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ будем называть нормальным, если существуют такие максимальные торы $T(G)$ и $T(G')$, что $\varphi(T(\Gamma)) \subset T(\Gamma')$, $\varphi(U(\Gamma)) \subset U(\Gamma')$. Заметим, что в действительности последнее включение всегда выполняется в наших условиях и мы его добавили для полноты.

Ключевую роль в доказательстве основной теоремы играет

Теорема 1. *Если Γ и Γ' изоморфны, а центры групп G и G' не содержат элементов конечного порядка, то существуют нормально изоморфные подгруппы конечного индекса $H \subset \Gamma$ и $H' \subset \Gamma'$. Если центры G и G' тривиальны, то всякий изоморфизм φ: $\Gamma \to \Gamma'$ является нормальным.*

Доказательство. Пусть φ: $\Gamma \to \Gamma'$ — заданный изоморфизм. Покажем, что $U(\Gamma)$ — нильпотентный радикал в Γ. Действительно, пусть $N \supset U(\Gamma)$ — нильпотентный нормальный делитель Γ. Тогда $\overline{N}$ — нильпотентный нормальный делитель в $\overline{\Gamma}$ и его полупростая часть $\overline{N}_s$ — нетривиальная инвариантная подгруппа ([8]). Тогда $\overline{N}_s$ содержится в центре группы $\overline{\Gamma} = G$ ввиду связности G и полупростоты элементов $\overline{N}_s$. Но центр G не содержит элементов конечного порядка, значит, $\overline{N}_s = (e)$ и $N = U(\Gamma)$. Аналогично, $U(\Gamma')$ — нильпотентный радикал Γ'. Поэтому $\varphi(U(\Gamma)) = U(\Gamma')$.

Используя экспоненциальное отображение, мы будем отождествлять, для простоты обозначений, $U(G)$ с ее алгеброй Ли. Определим представление ψ группы G в группу автоморфизмов алгебры Ли $U(G)$ по следующей формуле: $\psi(g)(u) = gug^{-1}$, где $g \in G$, $u \in U(G)$. Аналогично определим представление ψ' группы G' в группу автоморфизмов алгебры $U(G')$. Тогда ψ и ψ' — Q-рациональные гомоморфизмы G и G'. Так как $T(G) \cap Z(G) = (e)$, то ядро ψ совпадает с центром группы $U(G)$ — $Z(U)$. Аналогично ядро ψ' совпадает с $Z(U')$. Легко видеть, что $\psi(G)$ и $\psi'(G')$ — Q-определенные алгебраические группы и $\psi(T(G))$, $\psi'(T(G'))$ — их максимальные Q-определенные торы. Обозначим через φ_u ограничение φ на $U(\Gamma)$. Так как $U(G)$ — унипотентная алгебраическая группа, то $U(\Gamma)$ — плотная подгруппа в $U(G)$. Из плотности Γ в G вытекает плотность $T(\Gamma)$ в $T(G)$. По теореме Мальцева ([6]), φ_u можно единственным образом продолжить до рационального изоморфизма $\tilde{\varphi}_u$: $U(G) \to U(G')$. Так как $U(\Gamma)$ и $U(\Gamma')$ — плотные арифметические подгруппы в $U(G)$ и $U(G')$ соответственно и так как $\varphi_u(U(\Gamma)) = U(\Gamma')$, то $\tilde{\varphi}_u$ — Q-изоморфизм. $\tilde{\varphi}_u$ естественным образом индуцирует Q-рациональное представление $\tilde{\psi}$ группы G в группу автоморфизмов алгебры $U(G')$. При этом для каждого $g \in T(\Gamma)$ справедливо $\tilde{\psi}(g) = \psi'(\varphi(g))$. В частности, $\tilde{\psi}(T(\Gamma)) = \psi'(\varphi(T(\Gamma)))$. Так как $\overline{T(\Gamma)}$ плотна в $T(G)$, то $\overline{\tilde{\psi}(T(\Gamma))} = \tilde{\psi}(T(G))$, так что $\overline{\psi'(\varphi(T(\Gamma)))} = \tilde{\psi}(T(G))$. Очевидно, $\tilde{\psi}(T(G)) \subset \psi'(G')$ и $\tilde{\psi}(T(G))$ есть Q-определенный тор. Нетрудно видеть, что его размерность совпадает с размерностью $\psi'(T(G'))$, и потому $\tilde{\psi}(T(G))$ есть максимальный тор в $\psi'(G')$. $(\psi')^{-1}(\tilde{\psi}(T(G)))$ есть полупрямое произведение некоторого максимального Q-определенного тора $\tilde{T}(G')$ в G' на $Z(U')$. Пусть π: $\tilde{T}(G') \cdot Z(U') \to \tilde{T}(G')$ — каноническая проекция на первый множитель. Тогда π инъективно на $\varphi(T(\Gamma))$. Нетрудно видеть, что $T(\Gamma)$ и $T(\Gamma')$ — свободные абелевы группы одного ранга. Это означает, что $\pi(\varphi(T(\Gamma)))$ — арифметическая подгруппа в $\tilde{T}(G')$. Переходя в случае необходимости от $T(\Gamma)$ к ее подгруппе конечного индекса, можно считать, что $\pi(\varphi(T(\Gamma))) \subset \Gamma'$. В качестве H мы можем теперь взять $H = T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$. Если $h = t \cdot u$, где $h \in H$, $t \in T(\Gamma)$ и $u \in U(\Gamma)$, то $h \to \pi(\varphi(t)) \cdot \varphi(u)$ будет искомым нормальным изоморфизмом.

Пусть теперь $Z(G) = (e)$ и $Z(G') = (e)$. Если $g \in \varphi(T(\Gamma))$, то положим $g = s \cdot u$ — разложение Жордана, где u — унипотентный элемент, s — полупростой и $su = us$. Так как $g \in G'$ и G' — алгебраическая группа, то $u \in G'$ и $s \in G'$. Очевидно, $u \in U(G')$. Выше мы видели, что $\psi'(g) = \psi'(s) \cdot \psi'(u)$ — полупростой автоморфизм алгебры $U(G')$. Следовательно, $\psi'(u)$ — тождественный автоморфизм $U(G')$ и $u \in Z(U')$. Далее, если $g' \in \varphi(T(\Gamma))$, то $g'g = gg'$, а потому $g'u = ug'$. Мы доказали, что централизатор элемента u содержит арифметическую подгруппу группы G'. Из плотности этой подгруппы в G' вытекает, что $u \in Z(G')$, т. е. $u = e$. Значит, $\varphi(T(\Gamma))$ — абелева подгруппа Γ', состоящая из полупростых элементов. Известно ([7]), что всякая такая подгруппа содержится в максимальном Q-определенном торе $T(G')$ группы G'. И так как $T(\Gamma)$ и $T(\Gamma')$ — свободные абелевы группы одного ранга, то $\varphi(T(\Gamma))$ — арифметическая подгруппа группы $T(G')$. Поэтому $\varphi(T(\Gamma)) \subset T(\Gamma') = \Gamma' \cap T(G')$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если φ: $\Gamma \to \Gamma'$ — нормальный изоморфизм и центры групп G и G' не содержат элементов конечного порядка, то существует единственный Q-изоморфизм Φ: $G \to G'$, ограничение которого на Γ совпадает с φ на подгруппе конечного индекса из Γ.*

Доказательство. Так как φ — нормальный изоморфизм, то существуют такие $T(G)$ и $T(G')$, что $\varphi(U(\Gamma)) \subset U(\Gamma')$, $\varphi(T(\Gamma)) \subset T(\Gamma')$. А так как $T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$ имеет в Γ конечный индекс, то для доказательства теоремы достаточно построить Φ, совпадающий с φ на подгруппе $T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$. Как отмечалось при доказательстве теоремы 1, ограничение φ на $U(\Gamma)$ — φ_u — продолжится до Q-изоморфизма $\tilde{\varphi}_u$ группы $U(G)$ на группу $U(G')$. Отождествляя $U(G)$ с ее алгеброй Ли, определим представление ψ группы $T(G)$ в группу автоморфизмов алгебры $U(G)$ по следующей формуле: $\psi(g)(u) = gug^{-1}$, где $g \in T(G)$, $u \in U(G)$. Аналогично определим представление ψ' группы $T(G')$ в группу автоморфизмов алгебры $U(G')$.

Тогда ψ и ψ' — точные Q-гомоморфизмы. $\bar{\varphi}_u$ индуцирует точный Q-гомоморфизм $\bar{\psi}$ группы $T(G)$ в группу автоморфизмов алгебры $U(G')$. Тогда, как простое следствие плотности $U(\Gamma)$ в $U(G)$, получаем, что для любого $g \in T(G)$ справедливо равенство $\bar{\psi}(g) = \psi'(\varphi(g))$.

$\psi'(T(G'))$ есть Q-определенная алгебраическая группа, а из инъективности ψ' следует, что обратный к ψ' гомоморфизм $(\psi')^{-1}$ является C-рациональным гомоморфизмом группы $\psi'(T(G'))$ на группу $T(G')$, где C — наше универсальное поле. Из плотности $T(\Gamma)$ в $T(G)$ и $T(\Gamma')$ в $T(G')$ вытекает, что $\bar{\psi}(T(G)) = \psi'(T(G'))$. Очевидно, композиция $(\psi')^{-1} \cdot \bar{\psi}$ есть C-изоморфизм $T(G)$ на $T(G')$.

Пусть $g \in G$ и $g = tu$, где $t \in T(G)$, $u \in U(G)$. Определим теперь отображение Φ группы G на группу G' по следующему правилу: $\Phi(g) = (\psi')^{-1}(\bar{\psi}(t)) \cdot \bar{\varphi}_u(u)$. Легко видеть, что Φ есть C-рациональное отображение. Так как ограничение Φ на $T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$ есть гомоморфизм, то из плотности $T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$ в G следует, что Φ есть C-гомоморфизм группы G. Из инъективности Φ следует, что Φ есть C-изоморфизм G на G', совпадающий с φ на подгруппе $T(\Gamma) \cdot U(\Gamma)$. Используя тот факт, что Γ плотна в G, а Γ' плотна в G', и учитывая, что Γ и Γ' состоят из матриц с коэффициентами из поля Q, заключаем, что Φ есть на самом деле Q-изоморфизм. Единственность Φ вытекает из плотности Γ в G. Теорема доказана.

Доказательство первых двух утверждений основной теоремы немедленно следует из теорем 1, 2. Общий случай основной теоремы легко вытекает из доказанного. Элементы конечного порядка в $Z(G)$ и $Z(G')$ образуют конечные центральные подгруппы K и K'. Существуют Q-рациональные гомоморфизмы φ и φ' групп G и G' соответственно такие, что $\operatorname{Ker} \varphi = K$, $\operatorname{Ker} \varphi' = K'$. Так как $\Gamma \cap K = (e)$, $\Gamma' \cap K' = (e)$, то $\varphi(G)$ и $\varphi'(G')$ содержат изоморфные арифметические подгруппы. $\varphi(G)$ и $\varphi'(G')$ удовлетворяют условиям 1 и 2, а их центры не содержат элементов конечного порядка. Следовательно, $\varphi(G)$ и $\varphi'(G')$ Q-изоморфны, чем и завершается доказательство основной теоремы.

Институт математики
Академии наук БССР

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
1 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Борель, Математика, 12, № 5, 34 (1968). [2] M. S. Raghunathan, Ann. Math., 86, № 3, 409 (1967). [3] H. Garland, M. S. Raghunathan, Ann. Math., 92, № 3, 279 (1970). [4] G. D. Mostow, Actes Congr. Intern. Math., Paris, 2, 187 (1971). [5] G. D. Mostow, Ann. Math., 93, № 3, 409 (1971). [6] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, № 1, 9 (1949). [7] В. П. Платонов, Там же, 30, № 3, 573 (1966). [8] В. П. Платонов, ДАН, 151, № 2, 286 (1963).