Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 518:517.51

МАТЕМАТИКА

Ц. Б. ШОЙНЖУРОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В НЕИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С. Л. СОБОЛЕВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 V 1972)

1°. В работах С. Л. Соболева [1, 2] разработан новый метод оценок функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. В частности, С. Л. Соболев [1, 2] оценивал функционалы погрешности $l(x) = \mathscr{E}_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(x-x_k)$ в случае, когда $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(E_n)$, $m > n/2$, или другого пространства с близкими к $L_2^{(m)}(E_n)$ свойствами. В этих работах показано, что семейства формул с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальны в $L_2^{(m)}(E_n)$, и получено для нормы функционала погрешности асимптотическое выражение

$$\|l(x)\|_{L_2^{(m)*}(E_n)} = [B_{nm}(H)]^{1/2}|\Omega|^{1/2}h^m(1+O(h)).$$

В настоящей работе результаты [1, 2], относящиеся к асимптотически оптимальным семействам формул в $L_2^{(m)}(E_n)$, обобщаются на пространства [3, 4] $W_p^{(r)}(E_n)$, где $\bar r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Мы будем придерживаться обозначений, принятых в [1].

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пространство $W_p^{(\bar r)}(E_n)$ определим как множество обобщенных функций $\varphi \in S'$, для которых $F^{-1}\Big[\Big(1+\sum_{i=1}^{n}(2\pi\xi_i)^{2r_i}\Big)^{1/2}F\varphi(x)\Big]$ принадлежат пространству $L_p(E_n)$.

Введем норму в пространстве $W_p^{(\bar r)}(E_n)$:

$$\|\varphi\|_{W_p^{(\bar r)}(E_n)} = \Big\{\int_{E_n}\Big|F^{-1}\Big[\Big(1+\sum_{i=1}^{n}(2\pi\xi_i)^{2r_i}\Big)^{1/2}F\varphi(x)\Big]\Big|^p dx\Big\}^{1/p}. \tag{1}$$

При $1 < p < \infty$ пространство $W_p^{(\bar r)}(E_n)$ является рефлексивным банаховым пространством.

Пусть Ω — ограниченная область в E_n с достаточно гладкой границей Γ. Введем пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{(\bar r)}(\Omega)} = \inf\|\varphi^c\|_{W_p^{(\bar r)}(E_n)},$$

где нижняя грань берется по всевозможным сужениям функций из $W_p^{(\bar r)}(E_n)$ на области Ω.

Пространство $\widetilde W_p^{(\bar r)}(\Omega_0)$ определяем, как множество тех H-периодических функций $\varphi \in S'$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{\widetilde W_p^{(\bar r)}(\Omega_0)} = \Big\{\int_{\Omega_0}\Big|F^{-1}\Big[\Big(1+\sum_{i=1}^{n}(2\pi\xi_i)^{2r_i}\Big)^{1/2}F\varphi(x)\Big]\Big|^p dx\Big\}^{1/p}. \tag{2}$$

2°. Из рефлексивности пространства $W_p^{(\bar{r})}$ вытекает существование экстремальной функции $u \in W_p^{(r)}$, имеющий вид

$$u(x) = [\,|G_{\bar{r}}(x) * l(x)|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn} G_{\bar{r}}(x) * l(x)\,] * G_{\bar{r}}(x), \tag{3}$$

где $G_{\bar{r}}(x)$ — прообраз Фурье функции

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} [1 + (2\pi\xi_i)^2]^{\alpha_i}\right\}^{-\rho/2}, \quad \alpha_i = r_i/\rho, \ \rho = \max_j r_j.$$

Тогда норма функционала погрешности $l(x)$ вычисляется по формуле

$$\|l(x)\|_{W_p^{(\bar{r})*}(E_n)} = \Big[\int_{E_n} |G_{\bar{r}}(x) * l(x)|^{p'}\, dx\Big]^{1/p'}. \tag{4}$$

Условие вложения $W_p^{(\bar{r})}$ в C имеет вид

$$1 - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} > 0.$$

Пусть $l_0(x) = 1 - \sum_{\beta} \delta(x - H\beta)$ — периодический функционал погрешности. Тогда имеем

$$\|l_0(x)\|_{\widetilde{W}_p^{(\bar{r})*}(\Omega_0)} = \Big\{\int_{\Omega_0} \Big|\sum_{\beta\neq 0}\Big[1 + \sum_{i=1}^{n}(2\pi\beta H^{-1})_i^{2r_i}\Big]^{-1/2} \exp(2\pi i\beta H^{-1}x)\Big|^{p'} dx\Big\}^{1/p'} \tag{5}$$

Пусть $h = \begin{pmatrix} h_1 & & & 0 \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & h_n \end{pmatrix}$. Учитывая формулу

$$F[\Phi_0(H^{-1}h^{-1}x)] = |h|\,\Phi_0(\xi h H) = \sum_{\beta}\delta(\xi - \beta H^{-1}h^{-1}),$$

найдем норму функционала погрешности $l_0(x/h)$

$$\Big\|l_0\Big(\frac{x}{h}\Big)\Big\|_{\widetilde{W}_p^{(\bar{r})*}(\Omega_0)} = \Big\{\int_{\Omega_0}\Big|\sum_{\beta\neq 0}\Big[1 + \sum_{i=1}^{n}(2\pi\beta H^{-1}h^{-1})^{2r_i}\Big]^{-1/2}\exp(2\pi\beta H^{-1}x\,\Big|^{p'} dx\Big\}^{1/p'}. \tag{6}$$

Пусть $h_1 > h_2 > \ldots > h_n$ и $r_1 > r_2 > \ldots > r_n$.

Учитывая условие устойчивости и сходимости сеточного метода, положим $h_i = h_n^{(r_n/r_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда имеем

$$\Big\|l_0\Big(\frac{x}{h}\Big)\Big\|_{\widetilde{W}_p^{(\bar{r})*}(\Omega_0)} = h_n^{r_n}\,|B_{n\bar{r}}(H)|^{(p-1)/p}(1 + O(h_n)), \tag{7}$$

где

$$B_{n\bar{r}}(H) = \int_{\Omega_0}\Big|\sum_{\beta\neq 0}\Big[\sum_{i=1}^{n}(2\pi\beta H^{-1})_i^{2r_i}\Big]^{-1/2}\exp(2\pi i\beta H^{-1}x)\,dx.$$

Норма функционала погрешности $l_0(x)$ будет принимать наименьшее значение для такой решетки H^{-1}, у которой из всех решеток с объемом $|\Omega_0| = 1$ величина $B_{n\bar{r}}(H)$ будет наименьшей.

3°. Теорема. *Пусть $r_1 > r_2 > \ldots > r_n > 0$ и функционалы погрешности кубатурной формулы могут быть представлены в виде*

$$l^h(x) = \sum_{hH\gamma\in\Omega} l_\gamma\Big(\frac{x}{h}\Big), \quad \gamma\in R,$$

где все функционалы $l_\gamma\Big(\frac{x}{h}\Big) = \mathscr{E}_{\Omega_{h\gamma}}(x) - \sum_{|\gamma'|<L} C_{\gamma'}^{\gamma}\,\delta(x - hH(\gamma + \gamma'))$

удовлетворяют следующим условиям:

1) $\left\| l_\gamma \left(\frac{x}{h} \right) \right\|_{C^*} \leqslant A \,|\, h \,|$;

2) $\operatorname{supp} l_\gamma \left(\frac{x}{h} \right) \subset \mathscr{E}\,(x\colon \,|\, x - hH\gamma \,|_i < Lh_i, \; i = 1, 2, \ldots, n)$;

3) $(l_\gamma(x), x^\alpha) = 0, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < [r_1], \; \alpha_i < [r_i], \; \forall \gamma \in B_1 = \{\gamma\colon \; d(hH\gamma, \Gamma)_i < < 2Lh_i\}, \; i = 1, 2, \ldots, n$;

4) $(l_\gamma(x), x^\alpha) = 0, \; |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant [r_1], \alpha_i \leqslant [r_i], \forall \gamma \in B_2 = \{\gamma\colon \; d\,(hH\gamma, \Gamma)_i > > 2Lh_i, \; hH\gamma \in \Omega\}, \; i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда функционалы $l^h(x)$ с регулярным пограничным слоем при $h_1 \to 0$ являются асимптотически оптимальными и имеет место асимптотическое выражение

$$\| l^h(x) \|_{W_p^{(\bar{r})^*}(\Omega)} = h_n^{r_n} \,|\, B_{n\bar{r}}\,(H) \,|^{(p-1)/p} \,|\, \Omega \,|^{(p-1)/p} \,(1 + O\,(h_n)). \tag{8}$$

Доказательство теоремы основано на представлении нормы функционала в виде

$$\| l^h(x) \|_{W_p^{(\bar{r})^*}} \int_{E_n} [\,|\, G_{\bar{r}}\,(x) * l\,(x) \,|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn} G_{\bar{r}}\,(x) * l\,(x)] \cdot G_{\bar{r}}\,(x) * \left[l_0 \left(\frac{x}{h} \right) - l'\,(x) \right] dx, \tag{9}$$

где $l'(x)$ — функционал с регулярным пограничным слоем для области $\Omega^* = E_n \,/\, \Omega$.

Далее по неравенству Гёльдера, получим

$$\| l^h(x) \|_{W_p^{(\bar{r})^*}} \leqslant \left\{ \left[\int_B \left| G_{\bar{r}}\,(x) * l_0 \left(\frac{x}{h} \right) \right|^{p'} dx \right]^{1/p'} + \right.$$
$$\left. + \left[\int_B |\, G_{\bar{r}}\,(x) * l'\,(x) \,|^{p'} \,dx \right]^{1/p'} + \left[\int_{B^*} |\, G_{\bar{r}}\,(x) * l\,(x) \,|^{p'} \,dx \right]^{1/p'} \right\}, \tag{10}$$

где $B = \{x : x \in \Omega, \, d(x, \Gamma)_i > 2Lh_i\}$ и $B^* = E_n \,/\, B$.

Из свойства функции $G_{\bar{r}}(x)$, (7) и (10) следует, что

$$\| l^h(x) \|_{W_p^{(\bar{r})^*}} \leqslant |\, \Omega \,|^{(p-1)/p} \,|\, B_{n\bar{r}}\,(H) \,|^{(p-1)/p} \, h_n^{r_n} \,(1 + O\,(h_n)). \tag{11}$$

С другой стороны, можно показать, что, какова бы ни была последовательность функционалов ([5]) $l_h\,(x) = \mathscr{E}_\Omega\,(x) - \sum_{hH\gamma \in \Omega} C_\gamma \,|\, h \,|\, \delta\,(x - hH\gamma)$, при $h_1 \to 0$ всегда

$$\| l\,(x) \|_{W_p^{(\bar{r})^*}} \geqslant |\, \Omega \,|^{(p-1)/p} \,|\, B_{n\bar{r}}\,(H) \,|^{(p-1)/p} \, h_n^{r_n} \,(1 + O\,(h_n)). \tag{12}$$

Теорема следует из (11) и (12).

Автор выражает признательность акад. С. Л. Соболеву за обсуждение работы и В. Р. Портнову за ценные замечания.

Восточно-Сибирский технологический институт
Улан-Удэ

Поступило
3 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Лекции по теории кубатурных формул, 1, 1964, 2, 1965, Новосибирск. [2] С. Л. Соболев, ДАН, 163, № 3 (1965). [3] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теории вложения, М., 1969. [4] П. И. Лизоркин, Математич. сборн., 60, № 3 (1963). [5] В. И. Половинкин, Математические заметки, 5, в. 3 (1969).