

Е. А. ПОЛЕЦКИЙ

О СТИРАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 V 1972)

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово n -мерное пространство, U — область в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется K -квазиконформным, если оно непрерывно в U и абсолютно непрерывно на почти всех отрезках, параллельных осям координат, его частные производные принадлежат $L_n(U')$ для любой области $U' \subset\subset U$ и, кроме того,

$$K = \max \left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in U} \frac{\|f'(x)\|}{(Jf)_x}, \operatorname{ess\,sup}_{x \in U} (Jf)_x \|f'(x)\|^{-1} \right),$$

где $f'(x)$ — производная f в точке x и $(Jf)_x = \det f'(x)$. Класс таких отображений обозначим через $K(U)$. Если A — компактное подмножество в U , то $\operatorname{Cap}(U, A)$ — это нижняя грань $\int |\nabla u|^n dV$ по всем непрерывным функциям класса $W_n^1(U)$, равным 0 на ∂U и 1 на A . Хорошо известно ⁽¹⁾, что равенство $\operatorname{Cap}(U, A) = 0$ не зависит от U , и поэтому можно просто писать $\operatorname{Cap} A = 0$.

Пусть I — замкнутое подмножество U и $f \in K(U \setminus I)$; точку $x \in I$ назовем особой точкой f . Будем говорить, что f продолжается до квазиконформного отображения в точку x (т. е., что особая точка стирается), если существует отображение $\tilde{f}$, равное f на $U \setminus I$ и квазиконформное в окрестности точки x . В работах Б. В. Шабата ⁽²⁾, В. М. Миклюкова ⁽³⁾, Ю. В. Вайсала, С. Рикмана и О. Мартио ^(4, 5) вопрос о стирании особенностей изучался в случае, когда f — гомеоморфизм или когда $\operatorname{Cap} I = 0$. В этой заметке будут изучены особенности квазиконформных отображений без таких ограничений и приведен ряд примеров, показывающих, как могут быть устроены множества особых точек.

Введем необходимые обозначения. Если Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, то модуль этого семейства $M(\Gamma)$ определяется как нижняя грань $\int \rho^n dv$ по всем неотрицательным борелевским функциям ρ таким, что $\int_\gamma \rho ds \geq 1$ для любой кривой $\gamma \in \Gamma$. Мы будем обозначать через $S(x, r)$ и $B(x, r)$ соответственно сферу и шар с центром в точке x , а через $\Lambda_p(I)$ — меру Хаусдорфа (p -мерную) множества I . Если $f \in K(U)$ и γ_* — кривая в $f(U)$, то поднятием γ_* в U называется кривая γ в U такая, что $f \circ \gamma = \gamma_*$. Два поднятия γ_1 и γ_2 кривой γ_* существенно различны, если $\Lambda_1(\gamma_1 \cap \gamma_2) = 0$.

Пусть $f \in K(U)$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma_*(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_*(t) = y$. Пусть существует такая спрямляемая кривая γ в U , что $f \circ \gamma = \gamma_*$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = x$, где $x \in \partial U$. Тогда кривая γ называется асимптотической для точки x , γ — ее асимптотическим поднятием, а y — асимптотическим значением в x .

Пример 1. Возьмем в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ три сферы S_1, S_2, S_3 с центрами в точках $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2/3)$ и $(0, 0, -2/3)$ и радиусами 1, $1/3$ и $1/3$ соответственно. Рассмотрим область U , лежащую между этими сферами, и возьмем симметричные ей области относительно сфер S_2 и S_3 . Мы получим две новые области U_2^1 и U_2^2 и четыре сферы S_2^1, S_2^2, S_2^3 и S_2^4 . Возьмем области U_3^i , $1 \leq i \leq 4$, симметричные U_2^1 и U_2^2 относительно новых сфер, и таким

же образом продолжим этот процесс неограниченно. Множество I образов точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$ при всех симметриях является совершенным и лежит в множестве предельных точек фуксовой группы второго рода ⁽⁸⁾, порожденной инверсиями относительно сфер S_1 , S_2 и S_3 и, как легко видеть, $\Lambda_1(I) < \infty$. Очевидно, что области U_k^i заполняют весь единичный шар B без множества I . Введем в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические координаты (x, r, φ) вдоль оси x , причем угол φ измеряется от положительного направления оси z , и зададим отображение $h: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$h(x, r, \varphi) = \begin{cases} (x, r, \varphi), & -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \\ (x, r, \varphi + \pi), & \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, \\ \left(x, r, 3\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \left(x, r, 3\left(\varphi - \frac{5\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right), & \frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

Отображение h квазиконформно переводит сферы S_1 и S_2 в самих себя, сферу S_3 — на сферу S_2 , а область U — в область V , лежащую между сферами S_1 и S_2 . Пользуясь принципом симметрии, отображение h можно продолжить до квазиконформного отображения $h_1: B \setminus I \rightarrow H$ на множество $H = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$, причем все точки I являются неустранимыми особыми точками h_1 .

Этот пример легко переносится на случай $\mathbb{R}^n$ ($n > 3$). Можно построить отображение h_1' , чье дополнение образа E имеет ненулевую емкость, хотя $\Lambda_1(I) = 0$ — это опровергает существующую гипотезу. Отметим, что образ любой окрестности $B(x, r)$, $x \in I$, всюду плотен в H .

Пример 2. Приклеим к S_1 сверху шапочку и продолжим отображение h_1' в эту шапочку, так чтобы ее образ пересекал E ; мы получим отображение h_2 . Емкость дополнения образа $B(x, r)$, $x \in I$, в образе всей области при этом отображении больше нуля.

Пример 3. Совершим инверсию i относительно единичной сферы с центром в точке $(0, 0, 1)$. При этом область V из примера 1 перейдет в область V' , лежащую между параллельными плоскостями. Пусть h — отображение из примера 1: продолжая $i \circ h$ по симметрии, получим отображение $h_2: B \setminus I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Образ h_2 есть всё $\mathbb{R}^3$, и, более того, образ $B(x, r)$ тоже есть всё $\mathbb{R}^3$.

Пример 4. При помощи композиции первого примера и примера, описанного в статье В. А. Зорича ⁽⁹⁾, можно получить отображение, для которого все точки некоторого отрезка являются неустранимыми и, более того, точками накопления полюсов первого порядка.

Основным инструментом при нашем исследовании служит

Теорема 1. Пусть Γ — семейство кривых в U , $f \in K(U)$ и Γ_* — образ Γ , причем любая кривая $\gamma_* \in \Gamma_*$ имеет в Γ по крайней мере m существенно различных поднятий. Тогда

$$M(\Gamma_*) \leq \frac{K}{m} M(\Gamma).$$

Это неравенство позволяет получать достаточно хорошие оценки для модулей семейств кривых и является, в известном смысле, точным. В доказательстве этой теоремы используются методы из ⁽⁷⁾.

Пусть $f: U \setminus I \rightarrow \mathbb{R}^n$, где I — замкнутое подмножество U , — K -квазиконформное отображение. Если A — замкнутое множество в $U \setminus I$, а $I_0 \subset I$, то обозначим через $\Gamma_*(A, I_0)$ семейство кривых в $f(U \setminus I)$, которые допускают асимптотические поднятия, пересекающие A и I_0 . Используя результаты ⁽⁶⁾, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если $f \in K(U \setminus I)$, $\Gamma_*(I_0)$ — семейство асимптотических кривых для точек $x \in I_0$ и $\text{Cap } A > 0$. Тогда $M(\Gamma_*(I_0)) = 0$ в том и только том случае, если $M(\Gamma_*(A, I_0)) = 0$.

Эта теорема уточняет результат Ю. Г. Решетняка о независимости понятия емкости 0 от области и, кроме того, переносит его в пространство образа.

Теорема 3. Пусть $f \in K(U \setminus I)$, где I — замкнутое подмножество U , $\dim I \leq n - 2$, и Γ — семейство кривых, асимптотических для точек $x \in I$. Если $M(\Gamma_*) = 0$ и $\text{Cap}(R^n \setminus f(U \setminus I)) > 0$, то f продолжается до квазиконформного отображения $\tilde{f}: U \rightarrow R^n$ и $\text{Cap} I = 0$.

Подобный результат доказан в работах ^(3, 5) при условии $\text{Cap} I = 0$ вместо $M(\Gamma_*) = 0$. Теоремы 1 и 2 показывают, что из первого условия следует второе. В примерах 3 и 4 $M(\Gamma_*) = 0$, а $\text{Cap} I \neq 0$. Поэтому теорема 3 сильнее указанного результата.

Используя теоремы 1, 2 и 3, мы доказываем основной результат. Введем сначала дополнительные обозначения. Если $x \in I$, то число $i(x, r)$ равно верхней грани числа прообразов в $B(x, r) \setminus I$ точек $y \in R^n$, а $i(x) = \lim_{r \rightarrow 0} i(x, r)$. Пусть $I_k = \{x \in I: i(x) \geq k\}$. Очевидно, что I_k замкнуто в I .

Теорема 4. Пусть $f \in K(U \setminus I)$ и $\Lambda_{n-1}(I) = 0$. Тогда для любой точки $x \in I$ имеют место три возможности: 1) f продолжается квазиконформно в x ; 2) при любом r емкость дополнения образа $B(x, r)$ в образе $U \setminus I$ равна нулю; 3) при любом r модуль семейства кривых, асимптотических для $B(x, r) \cap I_\infty$ и ведущих в асимптотические значения из множества $f(B(x, r) \setminus I_\infty)$, больше нуля.

Эта теорема усиливает все известные результаты о стирании особенностей. Она показывает, что если отображение достаточно хорошее, т. е. не имеет место случай 3, то особенность либо устраняется, либо для нее справедлив аналог теоремы Сохоцкого. Из примера 2 видно, что случай 3 реализуется. Заметим, что мы не требуем условия $M(\Gamma_*) = 0$ и в примере 1 осуществляется вторая возможность теоремы.

Интерес к изучению множества особых точек, у которого $\Lambda_{n-1}(I) = 0$, вызван тем, что такое множество является нуль-множеством ⁽¹⁰⁾, кроме того, как легко показать, при квазиконформных отображениях образ его тоже нуль-множество.

Следствие. Если в условиях теоремы 4 для каждой точки $x \in I$ найдется r такое, что модуль асимптотических кривых для $B(x, r) \cap I_\infty$, ведущих в асимптотические значения из $f(B(x, r) \setminus I_\infty)$, равен 0, то множество точек разрыва замкнуто в U .

Пусть B_i — множество точек ветвления отображения f . Следует заметить, что во всех разобранных примерах любая неустраняемая особая точка является предельной для B_i и, более того, фундаментальная группа $\pi_1(B(x, r) \setminus (B_i \cup I))$ имеет бесконечное число образующих. Думается, что это условие необходимо для существования особых точек. Такая гипотеза подтверждается следующей теоремой, которая показывает, что образ в окрестности асимптотического значения для неустраняемой особой точки устроен достаточно плохо.

Теорема 5. Пусть $f \in K(U \setminus I)$, $\Lambda_{n-1}(I) = 0$, а γ_* — асимптотическая кривая для неустраняемой особой точки $x \in I$, идущая в $y \in R^n$. Тогда при любом $r > 0$ найдется точка $y' \in B(y, r)$, имеющая бесконечное число прообразов в связной компоненте $f^{-1}(B(y, r))$, которая пересекается с асимптотическим поднятием γ кривой γ_* , идущей в x .

Автор приносит благодарность Б. В. Шабату за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Г. Решетняк, Сибирск. матем. журн., 8, № 3, 629 (1967). ² Б. В. Шабат, ДАН, 132, № 5, 1045 (1960). ³ В. М. Миклюков, ДАН, 188, № 3, 525 (1969). ⁴ J. Väisälä, J. Math. and Mech., 19, № 1, 49 (1969). ⁵ O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, № 465, 12 (1971). ⁶ В. В. Асеев, ДАН, 200, № 3, 513 (1971). ⁷ Е. А. Полецкий, Матем. сборн., 83, в. 2, 261 (1970). ⁸ Л. Форд, Автоморфные функции, 1936. ⁹ В. А. Зорич, Матем. сборн., 74, в. 3, 431 (1967). ¹⁰ J. Väisälä, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, № 322, 4 (1962).