

В. А. ЯКУБОВИЧ

МИНИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ И НЕОБХОДИМОСТЬ
ЧАСТОТНОГО УСЛОВИЯ В КВАДРАТИЧНОМ КРИТЕРИИ
АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 V 1972)

1°. Пусть $\mathcal{Z} = \{z\}$ — вещественное линейное пространство. Как обычно, квадратичной формой будем называть функцию $A(z, z)$, где $A(z_1, z_2)$ — билинейный функционал на $\mathcal{Z}$, и квадратичным функционалом — вещественную функцию $\mathfrak{F}(z)$ вида $\mathfrak{F}(z) = A(z, z) + a(z) + \alpha$, где $A(z, z)$ — квадратичная форма, $a(z)$ — линейный функционал, α — вещественное число.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ — произвольные квадратичные функционалы на $\mathcal{Z}$ и $\mathfrak{E}_{z_0} \in \mathcal{Z}$, $\mathfrak{G}(z_0) > 0$.

Следующие утверждения равносильны: а) $\mathfrak{F}(z) \geq 0$ на множестве, где $\mathfrak{G}(z) \geq 0$, б) существует число $\tau \geq 0$ такое, что $\mathfrak{F}(z) - \tau \mathfrak{G}(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}$.

В теоремах 2, 3 встречаются выражения $\text{Sup } \varphi(\tau)$, $\text{Inf } \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ — вещественная функция, принимающая также, возможно, значения $+\infty$ или $-\infty$. Эти выражения понимаются так. Если $\mathfrak{E}_{\tau_0}$, $\varphi(\tau_0) = +\infty$, то $\text{Sup } \varphi(\tau) = +\infty$; если $\varphi(\tau) \neq +\infty \quad \forall \tau$, то $\text{Sup } \varphi(\tau)$ определяется обычным образом; если $\varphi(\tau) = -\infty$, то $\text{Sup } \varphi(\tau) = -\infty$. Аналогично определяется $\text{Inf } \varphi(\tau)$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ — квадратичные функционалы на $\mathcal{Z}$ и $\mathfrak{E}_{z_0}$, $\mathfrak{G}(z_0) > 0$. Тогда

$$\text{Inf}_{\mathfrak{G}(z) \geq 0} \mathfrak{F}(z) = \sup_{\tau \geq 0} \text{Inf}_{\mathcal{Z}} [\mathfrak{F}(z) - \tau \mathfrak{G}(z)]. \quad (1)$$

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$, $\mathfrak{H}(z)$ — квадратичные функционалы на $\mathcal{Z}$ такие, что 1) $\mathfrak{E}_{z_0} \in \mathcal{Z}$, $\mathfrak{G}(z_0) > 0$, II) $\mathfrak{H}(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}$, III) либо множество $\mathfrak{H}(z) = 0$, $\mathfrak{H}(z) \geq 0$ пусто, либо $\mathfrak{F}(z) \geq 0$ при $\mathfrak{H}(z) = 0$, $\mathfrak{G}(z) \geq 0$. Тогда

$$\text{Inf}_{\substack{\mathfrak{G}(z) \geq 0 \\ \mathfrak{H}(z) \neq 0}} \frac{\mathfrak{F}(z)}{\mathfrak{H}(z)} = \sup_{\tau \geq 0} \text{Inf}_{\mathfrak{H}(z) \neq 0} \frac{\mathfrak{F}(z) - \tau \mathfrak{G}(z)}{\mathfrak{H}(z)}. \quad (2)$$

Теоремы 1, 3 для случая, когда $\mathcal{Z}$ — евклидово пространство, $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ — квадратичные формы и $\mathfrak{H}(z) = |z|^2$, установлен в (1) *.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что из б) следует а). Покажем, что из а) следует б). Пусть вначале $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ — квадратичные формы. Используя теорему Дайнса (2) (см. также (1)), получаем, что при отображении $\eta_1 = \mathfrak{F}(z)$, $\eta_2 = \mathfrak{G}(z)$ в плоскость $R^2 = \{\eta\}$, $\eta = \|\eta_1, \eta_2\|$, образ P пространства $\mathcal{Z}$ — выпуклый конус. Из а) следует, что конус P не пересекается с конусом $Q = \{\eta_1 < 0, \eta_2 \geq 0\}$. Поэтому существует разделяющая их прямая $\tau_1 \eta_1 - \tau_2 \eta_2 \geq 0$ при $\eta \in P$, $\tau_1 \eta_1 - \tau_2 \eta_2 \leq 0$ при $\eta \in Q$. Так как $(-1, 0) \in Q$, $(-\varepsilon, 1) \in Q$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, то $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Так как $\mathfrak{E}_{z_0}$, $\mathfrak{G}(z_0) > 0$, то $\tau_1 \neq 0$. Поэтому $\eta_1 - \tau \eta_2 \geq 0$ при $\eta \in P$, где $\tau = \tau_2 / \tau_1 \geq 0$, т. е. выполнено б).

* В формулировке теоремы 1 в (1) автором допущена ошибка: слова «форма (Gx, x) не является отрицательно определенной» должны быть заменены словами «форма (Gx, x) не является неположительной». Имеются опечатки в доказательстве.

Пусть $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ — квадратичные функционалы и выполнено а). Без ограничения общности будем считать, что в условии теоремы $z_0 = 0$ (иначе мы положили бы $\mathfrak{F}_1(z) = \mathfrak{F}(z + z_0)$, $\mathfrak{G}_1(z) = \mathfrak{G}(z + z_0)$). Пусть $\mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{Z} \times R^1$, $R^1 = \{\xi\}$, $\mathfrak{G}(z) = A(z, z) + a(z) + \alpha$, где $A(z_1, z_2)$ — билинейный, $a(z)$ — линейный функционалы. Положим $\mathfrak{G}^0(z, \xi) = A(z, z) + \xi a(z) + \alpha \xi^2$. Аналогично по $\mathfrak{F}(z)$ определим квадратичную форму $\mathfrak{F}^0(z, \xi)$ на $\mathfrak{Z}^0$. Покажем, что $\mathfrak{F}^0(z, \xi) \geq 0$ при $\mathfrak{G}^0(z, \xi) \geq 0$. Для $\xi \neq 0$ это следует из а), так как $\mathfrak{F}^0(z, \xi) = \xi^2 \mathfrak{F}(\xi^{-1}z)$, $\mathfrak{G}^0(z, \xi) = \xi^2 \mathfrak{G}(\xi^{-1}z)$ при $\xi \neq 0$. Пусть $\mathfrak{G}^0(z, 0) \geq 0$ для некоторого Z . Так как $\mathfrak{G}(0) = \alpha \geq 0$, то $\mathfrak{G}(\eta z) \geq 0$ при достаточно больших $|\eta|$ (определенного знака, если $A(z, z) = 0$, и для любых η , если $A(z, z) = 0$, $a(z) = 0$). Из а) имеем $\mathfrak{F}(\eta z) \geq 0$, $\mathfrak{F}^0(z, 0) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^{-2} \mathfrak{F}(\eta z) \geq 0$ при $|\eta| \rightarrow \infty$ и $\eta a(z) < 0$, если $A(z, z) = 0$, $a(z) \neq 0$. Итак, $\mathfrak{F}^0(z, \xi) \leq 0$ при $\mathfrak{G}^0(z, \xi) \leq 0$. По доказанному $\exists \tau \geq 0 \quad \mathfrak{F}^0(z, \xi) - \tau \mathfrak{G}^0(z, \xi) \geq 0 \quad \forall z \in \mathfrak{Z}, \xi \in R^1$. Для $\xi = 1$ получаем б). Теорема 1 доказана.

Теорема 2 следует из теоремы 3 для $\mathfrak{F}(z) = 1$.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $\text{Inf}(\dots)$ слева в первом соотношении (2) через I_1 и $\text{Inf}(\dots)$ справа — через $I_2(\tau)$. Для любого $\tau \geq 0$ имеем $\mathfrak{F}/\mathfrak{G} \geq (\mathfrak{F} - \tau \mathfrak{G})/\mathfrak{G}$ при $\mathfrak{G} \geq 0$, $\mathfrak{G} \neq 0$. Поэтому, если $I_2(\tau) \neq -\infty$ $\exists \tau \geq 0$, то $I_1 \neq -\infty$, $I_1 \geq \inf_{\mathfrak{G} \geq 0, \mathfrak{G} \neq 0} (\mathfrak{F} - \tau \mathfrak{G})/\mathfrak{G} \geq I_2(\tau)$, $I_1 \geq \sup_{\tau \geq 0} I_2(\tau)$. Покажем справедливость обратного неравенства. Если $I_1 = -\infty$, то $I_2(\tau) = -\infty \quad \forall \tau \geq 0$ и выполнено первое соотношение (2). Пусть $I_1 > -\infty$. Тогда $\mathfrak{F}/\mathfrak{G} \geq I_1$, $\mathfrak{F} - I_1 \mathfrak{G} \geq 0$ при $\mathfrak{G} \geq 0$, $\mathfrak{G} \neq 0$ в силу II). Из III) имеем $\mathfrak{F} - I_1 \mathfrak{G} \geq 0$ при $\mathfrak{G} \geq 0$, $\mathfrak{G} = 0$. Следовательно, $\mathfrak{F} - I_1 \mathfrak{G} \geq 0$ при $\mathfrak{G} \geq 0$. По теореме 1 $\mathfrak{F} - I_1 \mathfrak{G} - \tau_0 \mathfrak{G} \geq 0 \quad \forall z, \forall \tau_0 \leq 0$. Из II) $(\mathfrak{F} - \tau_0 \mathfrak{G})/\mathfrak{G} \geq I_1$ при $\mathfrak{G} \neq 0$, т. е. $I_2(\tau_0) \geq I_1$, $\sup_{\tau \geq 0} I_2(\tau) \geq I_1$, а значит, $I_2(\tau_0) = \sup_{\tau \geq 0} I_2(\tau) = I_1$, т. е. выполнено первое соотношение (2). Так как $\sup \mathfrak{M} = -\inf(-\mathfrak{M})$, то выполнено второе соотношение (2). Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Теоремы 1, 2, 3 справедливы, очевидно, и для комплексного линейного пространства $\mathfrak{Z}$ (при этом $A(z_1, z_2)$ — эрмитова форма). Теорема 1 для комплексного случая, когда $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ — эрмитовы формы, установлена ранее в (3). Доказательство (3) существенно использует комплексность пространства.

2°. Перейдем к квадратичному критерию абсолютной устойчивости. Рассмотрим систему

$$dx/dt = Ax + b\xi, \quad \eta = c^*x + \alpha\xi. \quad (3)$$

В (3) $A, b, c, \alpha, x, \xi, \eta$ — матрицы и векторы, соответственно, порядков $N \times N, N \times n, N \times k, k \times n, N, n, k$, матрицы A, b, c, α постоянны, $|c| + |\alpha| \neq 0$, $|\xi(t)| \in L_2(0, T) \quad \forall T: 0 < T < \infty$.

Пусть $G(x, \xi)$ — эрмитова форма x, ξ и $\mathfrak{M}_G$ — множество пар функций $\{x(t), \xi(t)\}$, удовлетворяющих первому соотношению (3) и таких, что для каждой пары существует последовательность $t_n \rightarrow \infty$ и число $\gamma \geq 0$ такие, что

$$\int_0^{t_n} G[x(t), \xi(t)] dt \geq -\gamma. \quad (4)$$

Введем обозначение: $\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \int_0^\infty \varphi(t) dt$. Будем различать вещественный случай, когда все величины в (3) и коэффициенты формы $G(x, \xi)$ вещественны, и комплексный случай, когда они, вообще, комплексны. Множество вещественных $\{x, \xi\} \in \mathfrak{M}_G$ обозначим через $\mathfrak{M}_G^0$. Система (3) называется абсолютно устойчивой по выходу η в классе $\mathfrak{M}_G$ (в классе $\mathfrak{M}_G^0$), если для любых $\{x, \xi\} \in \mathfrak{M}_G$ ($\{x, \xi\} \in \mathfrak{M}_G^0$) величина $\|\eta\|^2 = \mathfrak{F}\{|\eta|^2\}$ конечна и $\|\eta\|^2 \leq C_1|x(0)|^2 + C_2\gamma$, где $C_1 > 0$,

$C_2 > 0$ — постоянные, зависящие лишь от A, b, c и коэффициентов формы $G(x, \xi)$. Через I ниже обозначается единичная $N \times N$ матрица.

Теорема 4. Пусть имеет место вещественный случай и I) пара (A, b) управляема, II) для любого $a \in R^N$ существует пара $\{x^0(t), \xi^0(t)\} \in \mathcal{M}_G^0$ с числом $\gamma = \gamma(a)$ в (4), удовлетворяющим условию $\inf_{\lambda > 0} \gamma(\lambda a) / \lambda^2 = 0$ и такая, что $x^0(0) = a$, а также $|x^0(t_n)| \rightarrow 0$ при $t_n \rightarrow \infty$, где t_n — последовательность в (4). Для абсолютной устойчивости системы (3) в классе $\mathcal{M}_G^0$ по выходу η необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$ было выполнено

$$G[A_{i\omega}^{-1}b\xi, \xi] \leq -\delta |\tilde{\eta}|^2, \quad \tilde{\eta} = [c^*A_{i\omega}^{-1}b + a]\xi, \quad A_{i\omega} = i\omega I - A, \quad (5)$$

при всех $\xi \in C^n$ и всех $\omega \in R^1$ таких, что $\det A_{i\omega} \neq 0$. В комплексном случае справедливо аналогичное утверждение с заменой $\mathcal{M}_G^0$ на $\mathcal{M}_G$.

Замечание. Условие II), очевидно, выполнено, если существует $N \times N$ матрица q такая, что $Q = A + bq^*$ — гурвицева матрица и $G(x, q^*x) \geq 0 \quad \forall x \in C^N$. В этом случае $x^0(t) = \exp(Qt)a$, $\xi^0(t) = q^*x^0(t)$.

Лемма. Пусть пара (A, b) управляема, $F(x, \xi)$ — эрмитова форма векторов $x \in C^N$, $\xi \in C^n$, $\mathfrak{F}[\xi(t)] = \mathfrak{S}\{F(x(t), \xi(t))\}$ — функционал, определенный для $\xi(t) \in L_2^{(n)}(0, \infty)$ (вещественных в вещественном случае) таких, что для решения $x(t)$ уравнения $dx/dt = Ax + b\xi(t)$, $x(0) = a$, выполнено $x(t) \in L_2^N(0, \infty)$. Если $\exists \omega_0 \in R_0^1$, $\xi_0 \in C^n$, $\rho_0 = F(A_{i\omega_0}^{-1}b\xi_0, \xi_0) > 0$, то $\sup \mathfrak{F}[\xi(t)] = +\infty$ как в вещественном, так и в комплексном случаях.

Доказательство леммы. В силу управляемости (A, b) в результате подходящей замены $\xi = \tau^*x + \xi'$ получим, что A — гурвицева матрица. Пусть Z — линейное пространство комплексных пар $z = \{\xi, y\}$, $\xi \in L_2^{(n)}(0, \infty)$, $y \in L_2(0, \infty)$, $dy/dt = Ay + b\xi$, $y(0) = 0$ и Z^0 — аналогичное множество вещественных пар в вещественном случае. Так как $x(t) = \exp(At)a + y(t)$, то $\mathfrak{F}[\xi]$ — квадратичный функционал на Z (на Z^0) с квадратичной формой $\mathfrak{F}_0[\xi] = \mathfrak{S}\{F[y(t), \xi(t)]\}$. Достаточно найти пару $\{\xi^{(1)}, y^{(1)}\} \in Z$ (и Z^0), такую, что $\mathfrak{F}_0(\xi^{(1)}) > 0$. (Тогда $\mathfrak{F}(\mu\xi^{(1)}) \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow \infty$.)

а) Комплексный случай. Используя управляемость (A, b) , определим $\xi_0(t)$, $y_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$, так, что $y_0(0) = 0$, $y_0(1) = A_{i\omega_0}^{-1}b\xi_0$, $dy/dt = Ay + b\xi$. Пусть $T > 1$. Положим $\xi^{(1)} = \xi_0(t)$, $y^{(1)} = y_0(t)$ на $[0, 1]$, $\xi^{(1)} = e^{i\omega_0 t}\xi_0$, $y^{(1)} = e^{i\omega_0 t}A_{i\omega_0}^{-1}b\xi_0$ на $[1, T]$, $\xi^{(1)} = \xi_0(T+1+t)$, $y^{(1)} = y_0(T+1+t)$ на $[T, T+1]$ и $\xi^{(1)} = 0$, $y^{(1)} = 0$ на $[T+1, \infty)$. Очевидно, $\{\xi^{(1)}, y^{(1)}\} \in Z$ и $\mathfrak{F}_0[\xi^{(1)}] = 2 \int_0^1 F[y^{(1)}, \xi^{(1)}]dt + (T-1)\rho_0 > 0$ при достаточ-

но большом T .

б) Вещественный случай. Положим $\xi^{(2)} = \text{Re } \xi^{(1)}(t)$, $y^{(2)} = \text{Re } y^{(1)}(t)$, $\xi^{(3)} = \text{Im } \xi^{(1)}(t)$, $y^{(3)} = \text{Im } y^{(1)}(t)$. Очевидно, $\{\xi^{(2)}, y^{(2)}\} \in Z^0$, $\{\xi^{(3)}, y^{(3)}\} \in Z^0$. Для любой эрмитовой формы $K(z)$, где $z \in C^{N+n}$, с вещественной матрицей коэффициентов выполнено $K(t) = K(\text{Re } z) + K(\text{Im } z)$. Поэтому $\mathfrak{F}(\xi^{(1)}) = \mathfrak{F}(\xi^{(2)}) + \mathfrak{F}(\xi^{(3)})$. Так как $\mathfrak{F}(\xi^{(1)}) > 0$, то либо $\mathfrak{F}(\xi^{(2)}) > 0$, либо $\mathfrak{F}(\xi^{(3)}) > 0$. В первом случае искомой парой будет $\{\xi^{(2)}, y^{(2)}\}$, во втором — $\{\xi^{(3)}, y^{(3)}\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Достаточность. Используя (5) и основную лемму (4) (приложение) (или (5), § 9, 3), получим, что существует эрмитова форма $V(x) = x^*Hx$, для которой $dV/dt + G(x, \xi) \leq -\delta |\eta|^2 \quad \forall x \in C^N$, $\xi \in C^n$, где $dV/dt = 2 \text{Re } x^*H(Ax + b\xi)$. Аналогично доказательству теоремы 2 из (6) получим из II), что $V(x) = x^*Hx \geq 0 \quad \forall x$.

Для $\{x, \xi\} \in \mathcal{M}^0$ ($\{x, \xi\} \in \mathcal{M}$), используя (4), получим $\int_0^T |\eta|^2 dt \leq$

$$\leq V[x(0)] - V[x(t_n)] + \gamma \leq V[x(0)] + \gamma. \quad \text{Отсюда} \quad \|\eta\|^2 < \infty, \quad \|\eta\|^2 \leq C_1 |x(0)|^2 + C_2 \gamma.$$

Необходимость. Пусть б) не выполнено. Если $\|\eta\| = \infty$ для любых $\{x, \xi\} \in \mathcal{M}_G (\in \mathcal{M}_G^0)$, то в классе $\mathcal{M}_G (\mathcal{M}_G^0)$ абсолютной устойчивости нет. Рассмотрим поэтому вторую возможность, когда $\|\eta\| < \infty$ для некоторой пары $\{x, \xi\} \in \mathcal{M}_G (\in \mathcal{M}_G^0)$. Пусть γ — соответствующее число в (4) и $x(0) = a$. Рассмотрим множество всех пар $\{x, \xi\} \in \mathcal{M}_G (\in \mathcal{M}_G^0)$ с этими γ и a , для которых $\|\eta\| < \infty$, и покажем, что для этого множества $\sup \|\eta\|^2 = \infty$, т. е. что и в этом случае в классе $\mathcal{M}_G (\mathcal{M}_G^0)$ абсолютной устойчивости нет. Используя управляемость (A, b) , придем к случаю, когда A — гурвицева матрица. Пусть Z (в вещественном случае Z^0) — множество пар $z = \{\xi, y\}$, определенное при доказательстве леммы. Очевидно, $\|\eta\|^2 = \mathfrak{F}(z)$ и $\mathfrak{G}(z) = \gamma + \mathfrak{F}\{G(x, \xi)\}$ — квадратичные функционалы на линейном пространстве $Z (Z^0)$. Не ограничивая общности, число γ можно считать сколь угодно большим (см. (4)). Поэтому $\exists z^0 \in Z (\exists z^0 \in Z^0) \quad \mathfrak{G}(z^0) > 0$. По теореме 2

$$\sup \|\eta\|^2 = \inf_{\tau \geq 0} (\sup [\mathfrak{F}\{|\eta|^2 + \tau G(x, \xi)\}] + \tau \gamma), \quad (6)$$

где $\sup$ справа берется по всевозможным $z = \{\xi, y\} \in Z (\in Z^0)$. При этом $x(t)$ удовлетворяет первому соотношению (3), $x(0) = a$ и $y = x(t) - \exp(At)a$. Так как не выполнено (5), то $\forall \delta > 0 \quad \exists \omega_0 \in R^1, \xi_0 \in C^n$

$$\rho_0 = |\tilde{\eta}|^2 + \delta^{-1} G(A_{i\omega_0}^{-1} b \xi_0, \xi_0) > 0.$$

Применим лемму для определения $\sup [\dots]$ в правой части (6). Имеем $F(x, \xi) = |\eta|^2 + \tau G(x, \xi)$, $\eta = c^* x + \alpha \xi$. При $\tau \neq 0$ для $\tau^{-1} = \delta$ имеем $F(A_{i\omega_0}^{-1} b \xi_0, \xi_0) = \rho_0 > 0$. По лемме в (6) справа $\sup [\dots] = \infty$. Пусть $\tau = 0$. В силу управляемости (A, b) $\exists \omega_0 \in R^1, \xi_0 \in C^n$ такие, что $\eta \neq 0$, где $\tilde{\eta}_0 = [c^* A_{i\omega_0}^{-1} b + \alpha] \xi_0$. Тогда $F(A_{i\omega_0}^{-1} b \xi_0, \xi_0) = |\tilde{\eta}|^2 > 0$. По лемме в (6) справа $\sup [\dots] = +\infty$ и при $\tau = 0$. Следовательно (в соответствии с определением $\inf$ для этого случая), из (6) имеем $\sup \|\eta\|^2 = \infty$. Мы показали, что при нарушении (6) оценка $\|\eta\|^2 \leq C_1 |x(0)|^2 + C_2 \gamma$ не выполняется. Теорема 4 доказана.

Замечание. Можно показать, что при нарушении условия (5)

$$\sup \int_0^n |\eta|^2 dt = \infty, \quad \text{где верхняя грань берется по всем } t_n \text{ и всем } \{x, \xi\} \in \mathcal{M}_G$$

(в вещественном случае по всем $\{x, \xi\} \in \mathcal{M}_G^0$) с фиксированным начальным вектором $x(0) = a$ и числом γ в (4).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Якубович, Вестн. Ленингр. ун-в., № 1 (1971). ² L. Dines, Bull. Am. Math. Soc., 47, 494 (1941). ³ М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмультял, Математические исследования, № 1, 1, 131 (1966). ⁴ В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, № 12, 5 (1970). ⁵ В. М. Попов, Гиперустойчивость автоматических систем, «Наука», 1970. ⁶ В. А. Якубович, ДАН, 209, № 2 (1973).