

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Ф. О. ПОРЦЕР

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ $t > 0$ В СЛУЧАЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 V 1972)

В данной статье оценки для производных от фундаментального решения (ф.р.) уравнения теплопроводности распространяются на уравнения специального вида с переменными коэффициентами. Такие оценки нужны для изучения асимптотики решения задачи Коши при $t \rightarrow \infty$ (см., например, ⁽³⁾), где существенно используется недоказанная оценка для производной от ф.р.).

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n a_i(x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E^{(n)}, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$0 < \mu \leq a_i(x_i) \leq \nu, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\left| \frac{d^m a_i(x_i)}{dx_i^m} \right| \leq a, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, 3, \quad a > 0. \quad (3)$$

Перейдем в (1) к новым пространственным переменным:

$$y_i = \int_0^{x_i} \frac{dx_i^*}{a_i(x_i^*)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{1}{A_i(y_i)} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right], \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in E^{(n)}, \quad t > 0, \quad (4)$$

где $A_i(y_i) = a_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $U(y, t) = u(x, t)$.

Л е м м а. *Соответствие между уравнениями вида (1) и (4) является взаимно однозначным.*

В самом деле, имеем

$$y_i = \varphi_i(x_i), \quad x_i = \Phi_i(y_i), \quad A_i(y_i) = a_i(x_i) = a_i(\Phi_i(y_i)),$$

т. е. из $a_i(x_i)$ мы получили $A_i(y_i)$. Если $A_i(y_i)$ известно, то

$$x_i = \Phi_i(y_i) = \int_0^{y_i} A_i(y_i^*) dy_i^*, \quad y_i = \varphi_i(x_i),$$

откуда

$$a_i(x_i) = 1/\varphi_i'(x_i),$$

т. е. из $A_i(y_i)$ мы получили $a_i(x_i)$. Лемма доказана.

Обозначим ф.р. задачи Коши для уравнений (1) и (4) соответственно $Z(x, t; \xi, \tau)$ и $Z(y, t; \eta, \tau)$, где

$$y_i = \int_0^{x_i} \frac{dx_i^*}{a_i(x_i^*)}, \quad \eta_i = \int_0^{\xi_i} \frac{d\xi_i^*}{a_i(\xi_i^*)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E^{(n)}, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in E^{(n)}, \quad t > \tau.$$

Легко получается формула

$$\tilde{Z}(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i(\xi_i)} Z(y, t; \eta, \tau). \quad (6)$$

Введем функции $g(x, t) = kt^{-n/2} \exp(-k|x|^2/t)$, через k обозначены различные положительные постоянные, зависящие только от n, μ, ν из (2).

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Справедливы следующие оценки:

$$g(y - \eta, t - \tau) \leq Z(y, t; \eta, \tau) \leq g(y - \eta, t - \tau); \quad (7)$$

$$g(x - \xi, t - \tau) \leq \tilde{Z}(x, t; \xi, \tau) \leq g(x - \xi, t - \tau); \quad (8)$$

$$|\partial Z / \partial y_i|, \quad |\partial Z / \partial \eta_i| \leq (t - \tau)^{-1/2} g(y - \eta, t - \tau); \quad (9)$$

$$|\partial \tilde{Z} / \partial x_i|, \quad |\partial [a_i(\xi_i) \tilde{Z}] / \partial \xi_i| \leq (t - \tau)^{-1/2} g(x - \xi, t - \tau); \quad (10)$$

$$|\partial Z / \partial t|, \quad |\partial Z / \partial \tau| \leq (t - \tau)^{-1} g(y - \eta, t - \tau); \quad (11)$$

$$|\partial \tilde{Z} / \partial t|, \quad |\partial \tilde{Z} / \partial \tau| \leq (t - \tau)^{-1} g(x - \xi, t - \tau). \quad (12)$$

Доказательство. Оценки (7) получены в (1). Исходя из них, мы докажем все остальные. Непосредственно из (7), учитывая (6), (2) и (5), получаем (8). В дальнейшем мы многократно воспользуемся тем, что в каждой полосе $0 \leq t - \tau \leq T$ имеют место оценки вида (9) – (12) с постоянными, зависящими не только от n, μ, ν , но еще от a из (3) и T (см. (2), стр. 73).

Из тождества

$$\frac{\partial Z(y, t; \eta, \tau)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{1}{A_i(y_i)} \frac{\partial Z(y, t; \eta, \tau)}{\partial y_i} \right] \quad (13)$$

следует для $\tau < t_1 < t_2$

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{E^{(n)}} Z^2(y, \theta; \eta, \tau) dy \right) d\theta = - \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{E^{(n)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i(y_i)} \left(\frac{\partial Z(y, \theta; \eta, \tau)}{\partial y_i} \right)^2 dy,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{E^{(n)}} Z^2(y, t_2; \eta, \tau) dy + \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{E^{(n)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i(y_i)} \left(\frac{\partial Z(y, \theta; \eta, \tau)}{\partial y_i} \right)^2 dy = \\ = \frac{1}{2} \int_{E^{(n)}} Z^2(y, t_1; \eta, \tau) dy. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, имеем для $\tau < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{E^{(n)}} \left(\frac{\partial Z(y, \theta; \eta, \tau)}{\partial y_i} \right)^2 dy \leq k \int_{E^{(n)}} Z^2(y, t_1; \eta, \tau) dy. \quad (14)$$

Аналогично доказываем, что для $\tau_1 < \tau_2 < t$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\theta \int_{E^{(n)}} \left(\frac{\partial Z(y, t; \eta, \theta)}{\partial \eta_i} \right)^2 d\eta \leq k \int_{E^{(n)}} Z^2(y, t; \eta, \tau_2) d\eta. \quad (15)$$

Далее, так как $\partial Z(y, t; \eta, \tau) / \partial t$ является решением (4), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(y, t; \eta, \tau)}{\partial t} &= \int_{E^{(n)}} Z(y, t; \xi, \theta) \frac{\partial Z(\xi, \theta; \eta, \tau)}{\partial \theta} d\xi = \\ &= - \int_{E^{(n)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i(\xi_i)} \frac{\partial Z(y, t; \eta, \theta)}{\partial \xi_i} \frac{\partial Z(\xi, \theta; \eta, \tau)}{\partial \xi_i} d\xi = \\ &= - \frac{2}{t - \tau} \int_{\tau - (t - \tau)/4}^{\tau} d\theta \int_{L^{(n)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i(\xi_i)} \frac{\partial Z(y, t; \xi, \theta)}{\partial \xi_i} \frac{\partial Z(\xi, \theta; \eta, \tau)}{\partial \xi_i} d\xi. \end{aligned}$$

Применяя (14), (15) и (7), получаем

$$|\partial Z(y, t; \eta, \tau) / \partial t| \leq k(t - \tau)^{-n/2-1}.$$

Отсюда и из (6)

$$|\partial \bar{Z}(x, t; \xi, \tau) / \partial t| \leq k(t - \tau)^{-n/2-1}. \quad (16)$$

Предположим теперь, что $a \leq v$ и воспользуемся тем, что функция $v_{\xi, \tau}(x, t) = \partial \bar{Z}(x, t; \xi, \tau) / \partial t$ является решением (1), т. е.

$$Lv_{\xi, \tau}(x, t) = 0,$$

а в полосе $0 < t - \tau \leq 1$ при условии $a \leq v$ функция $v_{\xi, \tau}(x, t)$ удовлетворяет оценке (12). При этом, как легко показать, функция $F_{\xi, \tau}(x, t) = (t - \tau)^{-1} g(x - \xi, t - \tau)$, стоящая в правой части (12), удовлетворяет неравенству $LF_{\xi, \tau}(x, t) \leq 0$ при $|x - \xi|^2 / (t - \tau) \geq k$. С учетом (16) получаем, что функции $w_{\xi, \tau}^{\pm}(x, t) = F_{\xi, \tau}(x, t) \pm v_{\xi, \tau}(x, t)$ удовлетворяют в области

$$\{|x - \xi|^2 / (t - \tau) \geq k, \quad t - \tau \geq 1\} \quad (17)$$

всем условиям леммы 5, (4), стр. 61, откуда следует, что в области (17) $w_{\xi, \tau}^{\pm}(x, t) \geq 0$, т. е. выполняется (12). При $|x - \xi|^2 / (t - \tau) \leq k$ (12) следует из (16) непосредственно. Таким образом, первая оценка (12) доказана при $a \leq v$. Наконец, используя инвариантность уравнения (1) и оценки (12) относительно преобразования $x' = \lambda x$, $t' = \lambda^2 t$, $\lambda > 0$, можно свести случай $a > v$ к случаю $a \leq v$. Таким образом, первая оценка (12) и, следовательно, первая оценка (11) доказаны. Аналогично доказываются вторые оценки (11) и (12).

Для получения первой оценки (9) введем, учитывая (5), функции

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \eta_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n, \tau}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) = \\ &= \frac{1}{A_i(y_i)} \frac{\partial Z(y, t; \eta, \tau)}{\partial y_i}, \end{aligned}$$

удовлетворяющие нелинейным уравнениям

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{A_i(y_i)} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i^2} + \sum_{j \neq i} a_j(x_j) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}. \quad (18)$$

Обозначим фундаментальные решения (18) через

$$\bar{Z}_i = \bar{Z}_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t; \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \eta_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n, \tau).$$

Из тождества (13) следует

$$\int_{E^{(n)}} \frac{\partial Z(y, t; \eta, \tau)}{\partial t} Z(y, t; \eta, \tau) dy = - \int_{E^{(n)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i(y_i)} \left(\frac{\partial Z(y, t; \eta, \tau)}{\partial y_i} \right)^2 dy.$$

Применяя (7) и (11), получаем

$$\int_{E^{(n)}} v_i^2 dx_1 \dots dx_{i-1} dy_i dx_{i+1} \dots dx_n \leq k(t - \tau)^{-n/2-1}. \quad (19)$$

Если выразить решения v_i уравнений (18) через их ф.р. $\tilde{Z}_i$, применить оценки (8) для $\tilde{Z}_i$ и (19), получим

$$|v_i| \leq k(t - \tau)^{-n/2-1/2}. \quad (20)$$

Поступая дальше точно так, как при выводе оценки (12) и (16), можно из (20) получить

$$|v_i| \leq k(t - \tau)^{-n/2-1/2} \exp \left[-k \frac{(y_i - \eta_i)^2 + \sum_{j \neq i} (x_j - \xi_j)^2}{t - \tau} \right].$$

Отсюда следует первая оценка (9) и, следовательно, первая оценка (10). Аналогично доказываются вторые оценки (9) и (10). Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и я. 1) Используя результаты ⁽⁵⁾, можно показать, что для $\partial \tilde{Z}(x, t; \xi, \tau) / \partial \xi_i$, вообще говоря, нет оценки (10).

2) Не изменяя доказательства теоремы, можно получить оценки (7), (8), (11), (12) для ф.р. следующих уравнений, соответственно обобщающих уравнения (1) и (4):

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_i) b_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1')$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{B_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)}{A_i(y_i)} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right]. \quad (4')$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. С. Д. Эйдельману, являющемуся вдохновителем настоящего исследования.

Воронежский политехнический институт

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. G. Aronson, Bull. Am. Math. Soc., **73**, № 6, 890 (1967). ² С. Д. Эйдельман, Параболические системы, «Наука», 1964. ³ Л. Д. Эскин, Изв. высш. учеб. завед., Математика, № 5, 154 (1966). ⁴ А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968. ⁵ Ф. О. Порпер, О поведении решения задачи Коши для параболических уравнений и систем при неограниченном возрастании времени, Кандидатская диссертация, МГУ, 1964.