

УДК 533.601.1

АЭРОДИНАМИКА

А. Ф. СИДОРОВ

О ТОЧНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 30 V 1972)

Предлагается метод построения точных решений нелинейного уравнения для потенциала скоростей установившихся пространственных сверхзвуковых течений политропного газа. Построенный класс течений применяется к решению задачи о сверхзвуковом истечении газа из осесимметричного сопла и к задаче о сверхзвуковом обтекании заостренных осесимметричных тел в предположении, что присоединенная ударная волна является слабой.

1. Уравнение для потенциала скоростей $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ⁽¹⁾ имеет вид

$$2 \sum_{ik} (1 - \delta_{ik}) \Phi_{x_i} \Phi_{x_k} \Phi_{x_i x_k} - \sum_i (\theta - \Phi_{x_i}^2) \Phi_{x_i x_i} = 0, \quad (1,1)$$

где x_i — декартовы координаты, δ_{ik} — символ Кронекера, θ — квадрат скорости звука,

$$\theta = (\gamma - 1) \left(K - \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{x_i}^2 \right), \quad (1,2)$$

$K = \text{const}$, γ — показатель адиабаты, $i, k = 1, 2, 3$.

Предполагая, что две компоненты вектора скорости u_1 и u_2 функционально независимы, введем новую неизвестную функцию $G(r, \varphi, z)$ ($u_1 = \Phi_{x_1} = r \cos \varphi$, $u_2 = \Phi_{x_2} = r \sin \varphi$, $x_3 = z$) по формуле

$$G = x_1 u_1 + x_2 u_2 - \Phi. \quad (1,3)$$

Вместо уравнения (1,1) для функции $G(r, \varphi, z)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & G_{\varphi\varphi} + r G_r - \theta (G_{rr} + r^{-1} G_r + r^{-2} G_{\varphi\varphi}) + \\ & + 2 G_z (r^{-1} G_{rz} G_{\varphi\varphi} + G_{rz} G_r - r^{-1} G_{\varphi z} G_{r\varphi} + r^{-2} G_{\varphi z} G_{\varphi}) - \\ & - (\theta - G_z^2) [r^{-2} G_{rz}^2 G_{\varphi\varphi} + r^{-1} G_{rz}^2 G_r - 2 r^{-2} G_{rz} G_{\varphi z} G_{r\varphi} + 2 r^{-3} G_{rz} G_{\varphi z} G_{\varphi} + r^{-2} G_{\varphi z}^2 G_{rr} - \\ & - G_{zz} (r^{-2} G_{\varphi\varphi} G_{rr} - r^{-2} G_{r\varphi}^2 - r^{-4} G_{\varphi}^2 + r^{-1} G_r G_{rr} + 2 G_{r\varphi} G_{\varphi})] = 0, \end{aligned} \quad (1,4)$$

$$\theta = (\gamma - 1) [K - 1/2 (r^2 + G_z^2)]. \quad (1,5)$$

Построим класс решений уравнения (1,4) в виде (решения такого же типа для нестационарных задач газовой динамики были построены в ⁽²⁾)

$$G(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(\varphi, z) r^k, \quad (1,6)$$

где

$$g^{(0)} = -Mz + G_0, \quad g^{(1)} = \lambda(\varphi) + \frac{z}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad \mu(\varphi) = (\lambda + \lambda') \sqrt{M^2 - 1}, \quad (1,7)$$

$$g^{(s+2)} = (z + \mu)^{(s+1)/2} \left[C^{(s+2)}(\varphi) + \frac{1}{2} \int_0^z F^{(s+2)}(\varphi, z) (z + \mu)^{-(s+3)/2} dz \right].$$

В (1,7) $M = \text{const} > 1$ — число Маха однородного потока ($u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = \Phi_{x_3} = M$), к которому примыкает возмущенное движение вида (1,6), G_0 — произвольная постоянная, $\lambda(\varphi)$ и $C^{(s+2)}(\varphi)$ ($s \geq 0$) — произвольные функции. Функция $F^{(s+2)}$ может быть выражена в общем случае через функции $g^{(k)}$ и их производные с $k < s + 2$, но выражение это весьма громоздко. Приведем лишь представления функций $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$, которые будут использованы в осесимметричном случае ($C^{(2)}(\varphi) = C_2 = \text{const}$, $C^{(3)}(\varphi) = C_3 = \text{const}$, $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$):

$$\begin{aligned} g^{(2)} &= C_2 (\mu - z)^{1/2} + \frac{(\gamma + 1) M^3}{2 (M^2 - 1)^2} (z - \mu), \\ g^{(3)} &= C_3 (\mu - z) + A_0 + A_1 (\mu - z)^{1/2} + A_2 (z - \mu) \ln (\mu - z), \quad (1,8) \\ A_0 &= \frac{11}{12} (M^2 - 1)^{1/2} C_2^2, \quad A_1 = \frac{M C_2}{6 (M^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{15\gamma + 27}{2} M^2 - 6 \right), \\ A_2 &= - \frac{(\gamma + 1) M^3}{12 (M^2 - 1)^{5/2}} [M^2 (\gamma + 4) - 2\gamma - 5]. \end{aligned}$$

Переход в физическое пространство x_1, x_2, x_3 осуществляется по формулам

$$x_1 = G_r \cos \varphi - r^{-1} G_\varphi \sin \varphi, \quad x_2 = G_r \sin \varphi + r^{-1} G_\varphi \cos \varphi. \quad (1,9)$$

Таким образом, класс течений вида (1,6) содержит бесконечное число произвольных функций одного независимого аргумента φ . При $r = 0$, $u_3 = M$ формулы (1,9) определяют поверхность слабого разрыва

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \cos \varphi - \lambda' \sin \varphi + \frac{x_3 \cos \varphi}{\sqrt{M^2 - 1}}, \\ x_2 &= \lambda \sin \varphi + \lambda' \cos \varphi + \frac{x_3 \sin \varphi}{\sqrt{M^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (1,10)$$

которая разделяет область равномерного сверхзвукового движения с числом Маха M и область возмущенного движения типа (1,6).

Использование координат r, φ, z удобно тем, что приближенное выражение для функции G , когда в ряде (1,6) берется 3—4 члена, позволяет часто получать приближенное представление поля течения в большой области физического пространства x_1, x_2, x_3 .

Сходимость ряда (1,6) и рядов для соответствующих производных можно доказывать для фиксированных функций $C^{(s)}(\varphi)$, которые определяются для конкретных задач аналитическим краевым условием, заданным на нехарактеристической поверхности уравнения (1,4). Доказательство сходимости сводится к специальным аналогам теоремы Коши — Ковалевской. Теоремы такого типа для случая линейных уравнений доказаны в (3—5).

Кроме сходимости, для каждой конкретной задачи необходимо также проверить условие разрешимости уравнений (1,9), определяющих r, φ как функции x_1, x_2, z .

2. Пусть однородный сверхзвуковой поток движется в круглой цилиндрической трубе с осью z ($z \leq 0$) и при $z > 0$ стенки трубы начинают расширяться по произвольному осесимметрическому закону

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \lambda_0 + S(z), \quad S(0) = S'(0) = 0, \quad S''(0) > 0 \quad (2,1)$$

(в случае истечения сверхзвуковой струи газа в вакуум функция $S(z)$ не определена, $g^{(k)}(0) = 0$). Для построения течений, примыкающих к однородному потоку, используем представление (1,6), где коэффициенты $g^{(k)}$ не зависят от φ (осесимметричный случай), $\lambda = \lambda_0 = \text{const} -$

радиус прямолинейной части трубы, $C^{(s+2)}(\varphi) = C_{s+2} = \text{const}$. Если функция $S(z)$ аналитическая в окрестности точки $z = 0$, то коэффициенты C_k однозначно выражаются через коэффициенты разложения функции $S(z)$ по степеням z с помощью условия, что кривая (2,1) является линией тока. В частности, постоянная C_2 в (1,8) выражается через радиус кривизны R_0 (при $z = +0$) криволинейной части трубы следующим образом:

$$C_2 = \frac{1}{2} \lambda_0^{1/2} (M^2 - 1)^{-3/4} \left[\frac{R_0}{M \lambda_0} + \frac{(\gamma + 1) M^3}{M^2 - 1} \right]. \quad (2,2)$$

В случае истечения в вакуум для функции G_z ($\Phi_{x_3} = -G_z$) получим следующее приближенное представление:

$$G_z = -M - \frac{r}{\sqrt{M^2 - 1}} + g_z^{(2)}(z) r^2 + g_z^{(3)} r^3, \quad (2,3)$$

где постоянные C_2 и C_3 , входящие в функции $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ из (1,8), определяются условиями $g^{(2)}(0) = g^{(3)}(0) = 0$.

С помощью (2,3) можно построить приближенные представления линий тока при малых отклонениях потока от прямолинейного (малых r). Из (2,3) следует также, что в окрестности точки $z = \lambda_0 \sqrt{M^2 - 1}$, $r = 0$ появляется предельная линия, а в окрестности точки $(0, 0)$ переход в физическое пространство по формулам (1,9) возможен. Вместо функции $S(z)$, определяющей форму криволинейной стенки, можно задать при $z \geq 0$ функцию $r = \Gamma(z)$ распределение радиальной компоненты вектора скорости вдоль стенки. В этом случае, если $\Gamma(z)$ аналитична, $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma'(0) > 0$, коэффициенты C_k также определяются однозначно и справедлива

Теорема. В некоторой окрестности точки $(0, 0)$ плоскости r, z ряд (1,6) определяет аналитическую функцию.

3. Пусть заостренное осесимметричное тело обтекается однородным сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки и после прохождения косой ударной волны поток остается сверхзвуковым. В предположении, что присоединенная ударная волна является слабой, для описания течений за волной используем приближенное представление для функции $G(z, r)$ в виде отрезка ряда (1,6) с учетом члена порядка $O(r^3)$. С помощью условий Гюниона⁽¹⁾ получим следующее приближенное уравнение для определения формы слабой ударной волны:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = G_r(z, R(z)) = f(z), \quad (3,1)$$

где $f(z)$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$f'(z) = \frac{K M R - K^2 R Q + \sqrt{(M - K Q)^2 + K^2 R^2 - 1}}{(M - K Q)^2 - 1}, \quad (3,2)$$

$$Q = G_z(z, R(z)) + M, \quad K = (\gamma + 1) / 4.$$

Постоянная интегрирования и постоянные, входящие в приближенное представление для функции G , определяются геометрией обтекаемого тела. При больших z из (3,2) следует, что в первом приближении форма ударной волны задается соотношением

$$f \approx \lambda_0 + \frac{z}{\sqrt{M^2 - 1}} + A \sqrt{B + 4 \sqrt{z + \lambda_0 \sqrt{M^2 - 1}}}, \quad (3,3)$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, что соответствует результату⁽⁶⁾. В окрестности точки $z = 0$ ряд для функции G_z имеет особенность вида $O(z^{-1/2})$.

Класс течений (1,4) позволяет рассмотреть в принципе пространственные задачи об истечении сверхзвуковых струй из неосесимметричных сопел, а также задачи об обтекании заостренных тел под ненулевым углом атаки; при этом требуется соответствующим образом выбирать произвольные функции $\lambda(\varphi)$ и $C^{(h)}(\varphi)$.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
19 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Мизес, Математическая теория течений сжимаемой жидкости, М., 1961.
² А. Ф. Сидоров, ДАН, 204, № 4 (1972). ³ G. F. D. Duff, Canad. J. Math., 10, № 1 (1958). ⁴ В. М. Бабич, Матем. сборн., 52 (94), в. 2 (1960). ⁵ D. Ludwig, Pure and Appl. Math., 13, № 3 (1960). ⁶ Л. Д. Ланлау, ПММ, 9, в. 4 (1945).