

И. В. МАЙОРОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 11 XII 1972)

Рассматривается система нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$L(v_i(x)) = v_i(x) + \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2tx}\right) v_i(t) dt + \\ + \int_0^1 v_i(t) \cdot H(x, t) dt = \bar{h}_i(x, v_i(x)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $H(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi k} \int_0^x (x-y)^{-2/3} \frac{\partial}{\partial y} [G(t, 0; y, 0) - G_0(t, 0; y, 0)] dy$, G и

G_0 — функции Грина задачи N и уравнения Трикоми $E(z) = yz_{xx} + z_{yy} = 0$, $y \geq 0$, для произвольной D_1 и «нормальной» области соответственно,

$$\bar{h}_i(x, v_i(x)) = h_i(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x-y)^{-2/3} [u_i(y, y) - v_i(y, 0)] dy, \quad (2)$$

$$u_i(\xi, \eta) = z_i(\xi, \eta) - \bar{z}_i(\xi, \eta) =$$

$$= \lambda \int_0^\xi d\xi' \int_{\xi'}^\eta (\eta' - \xi')^{-2/3} V(\xi, \eta; \xi', \eta') \cdot f(\xi, \eta, u_1 + \bar{z}_1, \dots, u_n + \bar{z}_n) d\eta',$$

$$v(x, y) = z_i(x, y) - \bar{z}_i(x, y) =$$

$$= \int_D f_i(\xi, \eta, v_1 + \bar{z}_1, \dots, v_n + \bar{z}_n) \cdot G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$z_i(x, y)$ — решения уравнений $E(z_i) = f_i(x, y, z_1, \dots, z_n)$ в D_1 , $v_i(x) = \partial z_i(x, 0) / \partial y$, ξ и η — характеристические координаты для уравнения Трикоми в случае $y < 0$, $\bar{z}_i(x, y)$ и $\bar{z}(\xi, \eta)$ — решения задачи N и задачи Коши — Гурса для уравнения $E(z) = 0$, AB — длина линии перехода, $D_2 \in D$ при $y \geq 0$.

Целью настоящей статьи является доказательство разрешимости системы (1), к которой сводится доказательство существования решения одной нелинейной системы уравнений смешанного типа (1).

Теорема. Если функции $f_i(x, y, z_1, \dots, z_n)$ непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области, причем

$$\partial f_i / \partial z_k = c_{ik} > 0, \quad (n-1)(c_{ik} - c_{ki}) \leq 2\sqrt{c_{ik}c_{ki}}, \quad i \neq k,$$

а область D_1 и отрезок AB достаточно малы, то система нелинейных сингулярных интегральных уравнений (1) имеет решение в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Наметим схему доказательства. Определим последовательность функций $z_i^{(m)}(\xi, \eta)$ и $z_i^{(m)}(x, y)$ по формулам

$$z_i^{(m)} = \bar{z}_i(\xi, \eta) + u_i^{(m)}(\xi, \eta), \quad (3)$$

$$z_i^{(m)}(x, y) = \bar{z}_i(x, y) + v_i^{(m)}(x, y), \quad (4)$$

где $\bar{z}_i(x, y)$ и $\bar{z}_i(\xi, \eta)$ — решения системы уравнений $E(z_i) = 0$, для задачи N и задачи Коши — Гурса,

$$u_i^{(m+1)}(\xi, \eta) = \lambda \int_0^\xi d\xi' \int_{\xi'}^\eta (\eta' - \xi')^{-1/2} V f_i(\xi', \eta', u_1^{(m)} + \bar{z}_1, \dots, u_n^{(m)} + \bar{z}_n) d\eta',$$

$$v_i^{(m+1)}(x, y) = \int_D \int f(\xi, \eta, v_1^{(m)} + \bar{z}_1, \dots, v_n^{(m)} + \bar{z}_n) \cdot G d\xi d\eta.$$

Пусть $u_i^{(0)}(\xi, \eta) = v_i^{(0)}(x, y) = 0$. Тогда из формул (3) и (4) следует

$$z_i^{(0)}(\xi, \eta) = \bar{z}_i = k \int_0^\xi v_i^{(0)}(t) \cdot (\eta - t)^{-1/2} (\xi - t)^{-1/2} dt, \quad (5)$$

$$z_i^{(0)}(x, y) = \bar{z}_i = - \int_0^1 v_i^{(0)}(t) \cdot G(t, 0; x, y) dt. \quad (6)$$

Отсюда при $\xi = \eta = x$ и $y = 0$ получим

$$z_i^{(0)}(x, x) = \tau_i^{(0)}(x) = k \int_0^x v_i^{(0)}(t) \cdot (x - t)^{-1/2} dt,$$

$$z_i^{(0)}(x, 0) = \tau_i^{(0)}(x) = - \int_0^1 v_i^{(0)}(t) \cdot G(t, 0; x, 0) dt.$$

Исключая из этой системы $\tau_i^{(0)}(x)$, для $v_i^{(0)}(x)$ получим сингулярные интегральные уравнения $L(v_i^{(0)}(x)) = 0$, линейные относительно $v_i^{(0)}(x)$.

Но известно ⁽³⁾, что к таким уравнениям применима теория Фредгольма. Так как уравнения $L_i^{(0)}(x) = 0$ эквивалентны системе $E(z_i) = 0$, единственность решения которой доказана в ⁽¹⁾, то в силу общей теории Фредгольма обеспечено существование решения уравнений $L(v_i^{(0)}(x)) = 0$.

Определив таким образом $v_i^{(0)}(x)$ и подставив в формулы (5), (6), найдем $z_i^{(0)}(\xi, \eta)$ и $z_i^{(0)}(x, y)$. И вообще для m -х приближений в областях D_2 и D_1 получим формулы, определяемые соответственно соотношениями (3) и (4), где $u_i^{(m)}(\xi, \eta)$ и $v_i^{(m)}(x, y)$, в силу формул (3) и (4), уже определены.

Исключая из полученной системы значения $\tau_i^{(m)}(x)$, вдоль отрезка AB получим систему сингулярных интегральных уравнений вида

$$L(v_i^{(m)}(x)) = h_i^{(m)}(x), \quad (7)$$

$$\text{где} \quad h_i^{(m)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x - y)^{-1/2} [u_i^{(m)}(y, y) - v_i^{(m)}(y, 0)] dy.$$

Система (7), линейная относительно $v_i^{(m)}(x)$, эквивалентна системе дифференциальных уравнений смешанного типа

$$E(z_i^{(m)}) = f_i(x, y, z_1^{(m-1)}, \dots, z_n^{(m-1)}),$$

которая, по доказанному в статье ⁽¹⁾, имеет единственное решение.

Относительно системы (7) имеют место следующие предложения.

Лемма 1. Если $h_i^{(m)}(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера порядка $1/6 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/6$ при $0 \leq x \leq 1$, а $t^\varepsilon(1 - t)^\varepsilon H(x, t)$ — условию Гёльдера относительно x порядка $\delta < \varepsilon$ равномерно по t , $0 \leq t \leq 1$, то систему сингулярных интегральных уравнений (7) можно представить в виде

$$v_i^{(m)}(x) + \int_0^1 K(x, t) \cdot v_i^{(m)}(t) dt = g_i^{(m)}(x), \quad (8)$$

где

$$K(x, t) = \frac{3}{4} \left[H(x, t) - \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{u(1-u)}{x(1-x)} \right]^{1/3} \left[\frac{1}{u-x} - \frac{1}{u+x-2ux} \right] H(u, t) du \right],$$

$$g_i^{(m)}(x) = \frac{3}{4} \left[h_i^{(m)}(x) - \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{u(1-u)}{x(1-x)} \right]^{1/3} \left[\frac{1}{u-x} - \frac{1}{u+x-2ux} \right] h_i^{(m)}(u) du \right],$$
(9)

к которой применима теория Фредгольма.

Доказательство этой леммы повторяет доказательство, проведенное для одного уравнения в работах (2, 3).

Лемма 2. Если функция $H(x, t)$ удовлетворяет условиям первой леммы, то функция $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|t^\varepsilon (1-t)^\varepsilon K(x, t)| \leq c(1-x)^{-1/3-\delta}, \quad (10)$$

где δ произвольно мало, а c постоянная.

Лемма 3. Решение системы интегральных уравнений (7) представимо в форме

$$v_i^{(m)}(x) = g_i^{(m)}(x) + \int_0^1 \Gamma(x, t, 1) \cdot g_i^{(m)}(t) dt, \quad (11)$$

где $\Gamma(x, t, 1)$ — резольвента ядра $K(x, t)$.

Эта лемма следует из общей теории систем интегральных уравнений, к которым применима теория Фредгольма.

В силу единственности решения системы (7) и общей теории систем интегральных уравнений, к которым применима теория Фредгольма, система (7) имеет решение.

Предположим, что обеспечена равномерная сходимость (это следует из последующих лемм) всех последовательностей, участвующих в этом процессе. Тогда в системе (7) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, функции $v_i(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_i^{(m)}(x)$ являются решением системы (1),

чем и завершается доказательство теоремы.

Равномерная сходимость рассмотренных выше последовательностей обеспечивается следующими леммами.

Введем обозначение $\Delta F_i^{(k)}(p) = |F_i^{(k)}(p) - F_i^{(k-1)}(p)|$.

Лемма 4. В областях D_2 и D_1 имеют место оценки

$$\Delta u_i^{(1)}(\xi, \eta) \leq c_1 \eta, \quad \Delta \frac{d}{dx} u_i^{(1)}(x, x) \leq c_2 x^{1/3};$$

$$\Delta v_i^{(1)}(x, y) \leq c_3, \quad \Delta \frac{d}{dx} v_i^{(1)}(x, 0) \leq c_3,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 постоянные.

Эти неравенства непосредственно следуют из формул (3) и (4), определяющих функции $v_i^{(m)}(x, y)$ и $u_i^{(m)}(\xi, \eta)$.

Лемма 5. Для функций $h_i^{(1)}(x), g_i^{(1)}(x), v_i^{(1)}(x)$ справедливы оценки

$$\Delta h_i^{(1)}(x) \leq c c_5, \quad \Delta g_i^{(1)}(x) \leq c c_6 (1-x)^{-1/3}, \quad \Delta v_i^{(1)}(x) \leq c c_7 (1-x)^{-1/3},$$

где $c = \max \{c_1, \dots, c_4\}$, c_5, c_6, c_7 постоянные.

Доказательство этих оценок получается с помощью формул (2), (9), (11).

Л е м м а 6. В областях D_2 и D_1 имеют место оценки

$$\Delta z_i^{(1)}(\xi, \eta) \leq c c_8, \quad \Delta z_i^{(1)}(x, y) \leq c c_9,$$

где c_8 и c_9 постоянные.

Доказательство следует из формул (3) и (4) с учетом оценок, полученных в леммах 4 и 5.

Л е м м а 7. В областях D_2 и D_1 и вдоль AB для любого $k, k = 2, 3, \dots$ имеют место оценки

$$\Delta u_i^{(k)}(\xi, \eta) \leq c \eta M^{k-1}, \quad \Delta \frac{d}{dx} u_i^{(k)}(x, x) \leq c x^{1/3} M^{k-1},$$

$$\Delta v_i^{(k)}(x, y) \leq c M^{k-1}, \quad \Delta \frac{d}{dx} v_i^{(k)}(x, 0) \leq c M^{k-1},$$

$$\Delta h_i^{(k)}(x) \leq c c_5 x^{1/3} M^{k-1}, \quad \Delta g_i^{(k)}(x) \leq c c_6 (1-x)^{-1/3} M^{k-1},$$

$$\Delta v_i^{(k)}(x) \leq c c_7 (1-x)^{-1/3} M^{k-1},$$

$$\Delta z_i^{(k)}(\xi, \eta) \leq c c_8 M^{k-1}, \quad \Delta z_i^{(k)}(x, y) \leq c c_9 M^{k-1},$$

где $M = N\bar{c}$, N постоянная, зависящая от величины области D_1 и длины отрезка AB , $\bar{c}$ — постоянная интегрирования.

Эти оценки с помощью тех же формул, что и в предыдущих леммах, устанавливаются методом полной математической индукции.

Волгоградский государственный
педагогический институт
им. А. С. Серафимовича

Поступило
3 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. В. Майоров, ДАН, 183, № 2, 280 (1968). ² Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, М., 1947. ³ К. И. Бабенко, К теории уравнений смешанного типа, Докторская диссертация, М., 1951.