

Член-корреспондент АН СССР Д. МЕНЬШОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА К РЯДАМ ФУРЬЕ — ЛЕБЕГА

Известно, что всякий тригонометрический ряд Фурье от суммируемой функции $f(x)$ сходится по мере к этой функции на сегменте $[-\pi, \pi]^*$, а в таком случае, как известно, для любого ряда Фурье — Лебега можно определить подпоследовательность его частных сумм, сходящуюся почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Возникает вопрос, будет ли верно аналогичное утверждение, если вместо сходимости взять метод Чезаро какого-нибудь отрицательного порядка α .

Чтобы ответить на этот вопрос, напомним определение методов Чезаро. Как известно, метод Чезаро какого-нибудь порядка α , не равного целому отрицательному числу, определяется матрицей $\|c_{mk}\|$, элементы которой получаются из равенств

$$c_{mk} = \frac{1}{\binom{m+\alpha}{m}} \binom{m-k+\alpha-1}{m-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ c_{mm} = \frac{1}{\binom{m+\alpha}{m}}, \quad c_{mk} = 0, \quad k > m, \\ m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

(см., например, ⁽²⁾, гл. III, 4, стр. 130).

Если c_{mk} определяются из равенств (1), то выражения

$$\sum_{k=0}^m c_{mk} S_k, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

называются чезаровскими средними порядка α какого-нибудь числового ряда, где S_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, — частные суммы этого ряда. Если теперь мы имеем тригонометрический ряд Фурье от какой-нибудь суммируемой функции $f(x)$, то чезаровские средние этого ряда мы будем обозначать следующим образом:

$$U_m^{(\alpha)}(x, f) = \sum_{k=0}^m c_{mk} S_k(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $S_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — частные суммы данного ряда Фурье.

Возникает вопрос, существует ли для любой суммируемой функции $f(x)$ такая возрастающая последовательность натуральных чисел m_j , $j = 1, 2, \dots$, что соответствующая последовательность

$$U_{m_j}^{(\alpha)}(x, f), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Ответ на этот вопрос получается отрицательный; а именно, справедлива следующая

* Это утверждение следует из теоремы: если $0 < p < 1$ и если $S_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье суммируемой функции $f(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)| dx = 0 \quad (\text{см. } (1), \text{ стр. 28}).$$

Теорема 1. Существует функция $f(x)$, суммируемая на $[-\pi, \pi]$. для которой соответствующая последовательность (4) расходится на множестве положительной меры, лежащем на $[-\pi, \pi]$, какова бы ни была возрастающая последовательность натуральных чисел m_j , $j = 1, 2, \dots$, и каково бы ни было α , удовлетворяющее неравенству $-1 < \alpha < 0$.

В то же время можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть заданы произвольное совершенное нигде не плотное множество $P \subset [-\pi, \pi]$ и произвольная функция $f(x)$, суммируемая на $[-\pi, \pi]$.

Тогда для любого α , удовлетворяющего условиям $\alpha < 0$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$, функцию $f(x)$ можно изменить вне множества P таким образом, что получится суммируемая функция $g(x) = g_\alpha(x)$, для которой последовательность (4), если в ней заменить $f(x)$ на $g(x)$, сходится к этой функции $g(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ по некоторой возрастающей последовательности m_j , $j = 1, 2, \dots$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы, доказанной в (3). В настоящей заметке мы приведем эскиз доказательства теоремы 1.

Возьмем функцию $f(x)$, определенную из равенства

$$f(x) = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\cos vx}{\ln v}. \quad (5)$$

Известно, что ряд в правой части этого равенства сходится к $f(x)$ для любого $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ и является рядом Фурье — Лебега от этой функции (см., например, (4), гл. 1, § 30, стр. 102). Поэтому нам достаточно доказать, что теорема 1 верна для данной функции $f(x)$.

Если $-1 < \alpha < 0$, то элементы матрицы $\|c_{mk}\|$, определяемые из первого равенства (1), можно представить в виде

$$c_{mk} = -\frac{1}{\binom{m+\alpha}{m}} u_{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad (6)$$

где

$$u_k = \frac{|\alpha|}{k} \sum_{s=1}^{k-1} \left(1 - \frac{|\alpha|}{s}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

При этом можно доказать, что

$$\begin{aligned} \binom{m+\alpha}{m} &= \frac{1}{m^{|\alpha|}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \theta_m^{(\alpha)}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m^{(\alpha)} = 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k &= 1, \quad u_m > 0, \quad R_m \equiv \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k = \binom{m+\alpha}{m}, \\ m &= 1, 2, \dots; \quad -1 < \alpha < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим теперь через $S_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, частные суммы ряда Фурье от функции $f(x)$, определяемой из равенства (5). Тогда

$$S_0(x) = S_1(x) = 0, \quad S_k(x) = \sum_{v=2}^k \frac{\cos vx}{\ln v}, \quad k \geq 2. \quad (9)$$

Положим

$$p = 2^q, \quad \lambda_m = [\sqrt{m}], \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где q — постоянное натуральное число, точное значение которого мы определим позже. На основании (1), (3), (6) и (8) можно доказать, что для

функции $f(x)$, определяемой из (5), справедливо равенство

$$U_m^{(\alpha)}(x, f) = \frac{1}{\binom{m+\alpha}{m} \ln m} \left\{ V_m^{(\alpha)}(x, f) + \sum_{u=1}^3 W_{m,u}^{(\alpha)}(x, f) \ln m \right\}, \tag{11}$$

$$m = 2, 3, \dots, \quad -1 < \alpha < 0,$$

где

$$V_m^{(\alpha)}(x, f) = \{ \cos mx + L_m^{(\alpha)}(x, f) \ln m \}, \tag{12}$$

$$L_m^{(\alpha)}(x, f) = \sum_{k=2}^p u_k \cdot \{ S_{m-1}(x) - S_{m-k}(x) \}, \tag{13}$$

$$W_{m,1}^{(\alpha)}(x, f) = R_m \cdot S_{m-1}(x), \tag{14}$$

$$W_{m,2}^{(\alpha)}(x, f) = \sum_{k=p+1}^{\lambda_m} u_k \cdot \{ S_{m-1}(x) - S_{m-k}(x) \}, \tag{15}$$

$$W_{m,3}^{(\alpha)}(x, f) = \sum_{k=\lambda_m+1}^{m-1} u_k \cdot \{ S_{m-1}(x) - S_{m-k}(x) \}, \tag{16}$$

$S_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — частные суммы ряда в левой части (5). При этом для любого достаточно большого m во всех предыдущих суммах верхний индекс не меньше нижнего.

На основании (6), (9), (10), (14) и (16) можно доказать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{ W_{m,1}^{(\alpha)}(x, f) + W_{m,3}^{(\alpha)}(x, f) \} \ln m = 0, \tag{17}$$

$$x \neq 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad -1 < \alpha < 0.$$

Возьмем теперь для каждого α , $-1 < \alpha < 0$, натуральное число $q = q_\alpha$ достаточно большое, но фиксированное. Тогда, принимая во внимание (9), (10), (12), (13) и (15), мы можем определить для этого q такие множества $G_m^{(\alpha)}$, что будут выполняться условия

$$| V_m^{(\alpha)}(x, f) + W_{m,2}^{(\alpha)}(x, f) \ln m | > 1/(32q), \quad \forall x \in G_m^{(\alpha)}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

$$\text{mes } G_m^{(\alpha)} > 1/(48pq), \quad G_m^{(\alpha)} \subset (0, \pi), \quad -1 < \alpha < 0,$$

для всех m , начиная с некоторого $m = m_\alpha$.

Из последних условий и из (11), (17) следует существование такого множества G , $\text{mes } G \geq 1/(48pq) > 0$, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел m_j , $j = 1, 2, \dots$, соответствующая последовательность (4) расходится в каждой точке $x \in G$.

Так как $f(x)$ есть сумма ряда Фурье — Лебега (5), то теорема 1 доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Колмогоров, Fund. math., 7, 24 (1925). ² А. В. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. ³ Д. Е. Меньшов, Матем. сборн., 86 (128), 419 (1971). ⁴ Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, М., 1961.