

УДК 532.516

ГИДРОМЕХАНИКА

В. В. ПУХНАЧЕВ

ПЕРЕМЕННЫЕ МИЗЕСА В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 VIII 1972)

1. Пусть плоская область Ω занята вязкой несжимаемой жидкостью, находящейся в состоянии установившегося движения. Часть Γ границы Ω является свободной. Уравнения движения и условия на свободной границе, записанные в терминах функции тока $\psi(x_1, x_2)$ и приведенные к безразмерной форме, имеют вид в Ω :

$$\Delta\Delta\psi + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1}\right) + q = 0; \quad (1)$$

на Γ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial s} &= 0, \quad \Delta\psi - 2K\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \\ \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} + 2\frac{\partial^3\psi}{\partial s^2\partial n} - \frac{R}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 - \beta\frac{\partial K}{\partial s} + f_s &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь R — число Рейнольдса, β — параметр, пропорциональный коэффициенту поверхностного натяжения σ ; $q = q(x_1, x_2) = \partial f_1/\partial x_2 - \partial f_2/\partial x_1$, $\bar{f}(x_1, x_2) = (f_1, f_2)$ — заданное поле массовых сил, f_s — проекция $\bar{f}$ на направление касательной к Γ ; K — кривизна Γ ($K > 0$, если Γ выпукла наружу жидкости); $\partial/\partial s$ означает дифференцирование по направлению касательной, а $\partial/\partial n$ — по направлению внешней нормали к Γ (предполагается, что системы координат s, n и x_1, x_2 имеют одинаковую ориентацию). Первые два из условий (2) означают отсутствие потока жидкости и касательного напряжения на свободной границе. Третье условие есть следствие равенства нормального напряжения на свободной границе поверхностному давлению.

Перейдем в (1), (2) к новым независимым переменным $\psi, x = x_1$, выбрав в качестве неизвестной функции $x_2 = z(x, \psi)$. Вместо (1) получим уравнение

$$MMz - \frac{1}{z_\psi} Mz (Mz)_\psi - \frac{R}{z_\psi^2} (Mz)_x - q(x, z) = 0, \quad (3)$$

где нижние индексы x, ψ означают соответствующие частные производные и

$$M = M\left(z_x, z_\psi, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \psi}\right) \equiv \frac{1}{z_\psi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{[2z_x]}{z_\psi^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \psi} + \frac{1 + z_x^2}{z_\psi^3} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

В силу первого условия (2) образом Γ на плоскости x, ψ будет отрезок прямой $\psi = \text{const}$. Оставшиеся условия (2) в новых переменных принимают вид

при $\psi = \text{const}$:

$$Mz - \frac{2z_{xx}}{z_\psi(1 + z_x^2)} = 0,$$

$$z_x (Mz)_x - \frac{1+z_x^2}{z_\psi} (Mz)_\psi + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2}} \left(\frac{\sqrt{1+z_x^2}}{z_\psi} \right)_x \right] - \\ - \frac{R}{2} \left(\frac{1+z_x^2}{z_\psi^2} \right)_x + \beta \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2}} \right)_{xx} + f_1(x, z) + f_2(x, z) z_x = 0. \quad (4)$$

Независимые переменные x, ψ впервые были использованы Мизесом в теории пограничного слоя ^(1, 2). Впоследствии они нашли применение в ряде задач гидродинамики со свободной границей ⁽³⁻⁵⁾. Исследование течений вязкой жидкости со свободной границей с помощью переменных Мизеса, по-видимому, проводится здесь впервые.

2. Рассмотрим модельную задачу о струйном движении в периодическом поле массовых сил $\vec{f} = (a(x_1), 0)$, $a(x_1 + l) = a(x_1)$ и среднее по периоду значение функции a равно нулю. Движение также предполагается l -периодическим по x_1 и симметричным относительно оси $x_2 = 0$. Задавы ненулевой расход жидкости через поперечное сечение и средняя ширина струи. Математически задача сводится к определению в полосе $\bar{\Pi} = \{x, \psi: |x| < \infty, 0 \leq \psi \leq 1\}$ функции $z(x, \psi)$, удовлетворяющей в Π уравнению (3) с $q = 0$, при $\psi = 1$ условиям (4) с $f_1 = a, f_2 = 0$, а также условиям

$$z(x + l, \psi) = z(x, \psi), \quad z(x, 0) = z_{\psi\psi}(x, 0) = 0, \quad \int_0^l z(x, 1) dx = l. \quad (5)$$

Граница струи в плоскости x_1, x_2 определяется равенством $x_2 = z(x_1, 1)$. Параметры R и β имеют следующий смысл: $R = Q/\nu$, $\beta = gh/(\rho\nu Q)$, где ν — вязкость, ρ — плотность жидкости, Q и h — соответственно физические поперасход и полуширина струи. Ниже $|\cdot|_{4+\alpha, \bar{\Pi}}, |\cdot|_{4+\alpha, [0, 1]}$ означают соответствующие нормы Гёльдера, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial \psi^2$.

При $a = 0$ единственным решением задачи (3) — (5) является $z = \psi$, что соответствует равномерному потоку. Поэтому имеет смысл разыскивать при малых a решения, близкие к равномерному потоку.

Теорема 1. Пусть $a(x) \in C^{1+\alpha}[0, l]$ и $|a|_{4+\alpha, [0, 1]} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Тогда существует решение $z(x, \psi) \in C^{4+\alpha}(\bar{\Pi})$ задачи (3) — (5). Оно единственно в некотором шаре $|z - \psi|_{4+\alpha, \bar{\Pi}} \geq k\varepsilon$ ($k = \text{const} > 0$). При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место оценка $|z - \psi - \xi|_{4+\alpha, \bar{\Pi}} = O(\varepsilon^2)$, где $\xi(x, \psi)$ — решение линейной задачи

$$\Delta(\Delta\xi - R\xi_x) = 0 \text{ в } \Pi; \quad \xi_{\psi\psi} - \xi_{xx} = 0, \\ (\Delta\xi - R\xi_x)_\psi + 2\xi_{xx\psi} - \beta\xi_{xxx} = a(x) \text{ при } \psi = 1;$$

$$\xi(x + l, \psi) = \xi(x, \psi), \quad \xi(x, 0) = \xi_{\psi\psi}(x, 0) = 0, \quad \int_0^l \xi(x, 1) dx = 0.$$

Однолиственность отображения полосы $\bar{\Pi}$ на область $|x_1| < \infty, 0 \leq x_2 \leq z(x_1, 1)$ физической плоскости обеспечивается оценкой $z_\psi = 1 + O(\varepsilon)$, вытекающей из предложения 1. Отметим, что решение задачи (3) — (5) регулярно зависит от параметра β в любом конечном интервале его изменения. В частности, допускается, что $\beta = 0$ (нулевое поверхностное натяжение). В работе ⁽⁶⁾ предлагался другой подход к плоским стационарным задачам со свободной границей для уравнений Навье — Стокса, не позволяющий перейти к пределу при $\sigma \rightarrow 0$, но зато допускающий обобщение на трехмерный случай.

Приведем еще один пример, показывающий целесообразность выбора функции тока в качестве независимой переменной. Рассмотрим плоскую задачу о стационарном движении жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести. Здесь удобно перейти к независимым

переменным θ, ψ , считая искомой функцией $r^2 = \chi(\theta, \psi)$ (r, θ — полярные координаты). Пусть g — ускорение силы тяжести, ω — угловая скорость цилиндра, Q — расход через поперечное сечение пленки. Доказывается, что заданием расхода решение определяется и притом однозначно (в малом), если параметр $g^2/(Q\omega^3)$ достаточно мал. В этом случае движение оказывается близким к вращению жидкости как твердого тела.

3. Переменные Мизеса являются удобным инструментом при исследовании гладкости решения уравнений Навье — Стокса вблизи свободной границы. Пусть $P = (x_1^0, x_2^0)$ — внутренняя точка Γ . Для $r > 0$ определим $\bar{\Omega}_r^P = \{x_1, x_2: (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}, (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq r^2\}$, $\bar{\Gamma}_r^P = \Gamma \cap \bar{\Omega}_r^P$. Выберем r столь малым, что $\bar{\Omega}_r^P \setminus \bar{\Gamma}_r^P \subset \Omega$.

Одним из этапов получения оценок вблизи границы решений эллиптических уравнений ⁽⁷⁾ является процедура локального распрямления границы. В нашем случае распрямление границы достигается переходом на плоскость x, ψ . Последующее применение к решению уравнения (3) граничными условиями (4) результатов ⁽⁷⁾ показывает, что справедливы:

Теорема 2. Пусть функция $\psi(x_1, x_2)$ есть решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям на свободной границе (2). Предположим, что часть свободной границы $\bar{\Gamma}_r^P$ принадлежит классу $C^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и что $\psi \in C^{4+\alpha}(\bar{\Omega}_r^P)$. Если $\partial\psi/\partial n \neq 0$ для $(x_1, x_2) \in \bar{\Gamma}_r^P$ и $f_i \in C^{m-3+\alpha}(\bar{\Omega}_r^P)$, $i = 1, 2$, $m > 4$ целое, то при $\delta < r$ функция ψ принадлежит классу $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega}_\delta^P)$ и $\bar{\Gamma}_\delta^P$ принадлежит классу $C^{m+\alpha}$.

В частности, если $f_i \in C^\infty$, то свободная граница бесконечно дифференцируема в окрестности любой точки P , где $\partial\psi/\partial n \neq 0$. Физически условие $\partial\psi/\partial n \neq 0$ означает, что точка $P \in \Gamma$ не является критической.

4. Одной из задач, где переход к независимым переменным x, ψ представляется естественным, является задача об истечении струи. Она состоит в отыскании функции z , удовлетворяющей при $x > 0$, $0 < \psi < 1$ уравнению (3) с $q = 0$, при $x \geq 0$, $\psi = 1$ условиям (4) с $f_1 = f_2 = 0$, а также условиям $z = z_{\psi\psi} = 0$ при $x \geq 0$, $\psi = 0$ (мы ограничиваемся рассмотрением симметричных струй), условию ограниченности при $x \rightarrow \infty$ условиям $z = z_0(\psi)$, $z_x = z_1(\psi)$ при $x = 0$, $0 \leq \psi \leq 1$. Последние условия означают, что в начальном сечении струи $x = 0$ задан вектор скорости.

Не располагая теоремой существования решения задачи об истечении струи в точной постановке, мы предложим ее приближенное решение при больших числах Рейнольдса $R = Q/\nu$ (Q — расход через поперечное сечение струи). Пусть $\Psi = 1$, X — характерные масштабы по осям ψ и x . Предположим, что при $R \rightarrow \infty$ масштаб $X \rightarrow \infty$ и, кроме того, член $Rz_{\psi\psi}^{-2}(Mz)_x$ в уравнении (3) имеет тот же порядок, что и первые два члена. Отсюда с необходимостью получаем, что $X/R = \text{const}$.

Сделанное предположение означает, что при больших R силы вязкости и силы инерции в струе имеют одинаковый порядок. Оно соответствует известной гипотезе Прандтля в теории пограничного слоя ⁽²⁾.

Сделаем в соотношениях (3), (4) замену переменной $x = R\xi$ и обозначим $z(R\xi, \psi) = Z(\xi, \psi)$. В полученных равенствах перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. Предельное уравнение для функции Z допускает интегрирование по ψ ; возникающая при этом функция переменной ξ определяется из условия (4), подвергнутого предельному переходу. Совершая в полученном уравнении подстановку $w = Z_{\psi\psi}^{-2}$, приводим его к виду

$$w_\xi = \bar{\gamma} w w_{\psi\psi} \quad (6)$$

при $\xi > 0$, $0 < \psi < 1$. Мы получили известное уравнение Мизеса. Сформулируем для него вторую краевую задачу:

$$w(0, \psi) = u_0^2(\psi), \quad w_\psi(\xi, 0) = 0, \quad w_\psi(\xi, 1) = 0. \quad (7)$$

Функция $u_0(\psi) = 1/z_0'(\psi)$ задает начальный профиль продольной скорости.

сти. Второе условие (7) — следствие симметрии течения, а третье условие вытекает из (4) и означает отсутствие касательного напряжения на свободной границе. Если w известно, то из соотношений $Z_\psi = w^{-1/2}$, $Z = 0$ при $\psi = 0$ функция Z определяется однозначно.

Теорема 3. Пусть $u_0(\psi) \in C^{2+\alpha}[0, 1]$, $u_0 \geq \mu > 0$ для $0 \leq \psi \leq 1$ и выполнены условия согласования $u_0'(0) = u_0'(1) = 0$.

Тогда существует положительное решение w задачи (6), (7) при всех $\xi > 0$. Это решение единственно. При $\xi \rightarrow \infty$ оно допускает оценку $w - c^2 = O(\exp(-\lambda\xi))$, где c — среднее значение функции u_0 на интервале $[0, 1]$, $\lambda < \mu^2$ — положительная постоянная.

Отметим, что ранее уравнения типа пограничного слоя применялись к изучению струйных течений вязкой жидкости в работе (8).

5. В заключение коснемся некоторых вопросов применения переменных Мизеса к исследованию осесимметричных установившихся движений вязкой жидкости со свободной границей. Функция тока $\psi(x, r)$ осесимметричного движения вводится соотношениями $v_x = r^{-1}\partial\psi/\partial r$, $v_r = -r^{-1}\partial\psi/\partial x$, где v_x, v_r — проекции вектора скорости на оси x, r цилиндрической системы координат.

Справедлив аналог теоремы 2 о повышении гладкости свободной границы и поля скоростей вблизи нее в осесимметричном случае. Наряду с условиями исходной гладкости решения и требованием $\partial\psi/\partial n \neq 0$ в точке P свободной границы здесь предполагается, что эта точка не лежит на оси $r = 0$.

Далее рассмотрим задачу об истечении осесимметричной струи в приближении пограничного слоя. Выберем в качестве независимых переменных x, ψ , считая искомой функцией $r^2 = y(x, \psi)$. Принимая гипотезы предыдущего пункта, произведем асимптотическое упрощение при $R \rightarrow \infty$ уравнения, которому удовлетворяет функция $Y(R^{-1}x, \psi) = y(x, \psi)$. Подстановкой $Y_\psi^{-1} = v(\xi, \psi)$, где $\xi = R^{-1}x$, предельное уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\int_0^\psi \frac{d\psi}{v} \right) v \frac{\partial v}{\partial \psi} \right]. \quad (8)$$

Решение этого уравнения ищется в полуполосе $\xi > 0, 0 < \psi < 1$. Линия $\psi = 1$ соответствует свободной границе, а линия $\psi = 0$ — оси симметрии. При $\psi = 0$ уравнение (8) вырождается в уравнение первого порядка $v_\xi = 2v_\psi$. Мы требуем, чтобы решение (8) было ограничено вплоть до линии вырождения. Кроме того, поставим краевое условие $v_\psi(\xi, 1) = 0$ (касательное напряжение на свободной границе равно нулю) и начальное условие $v(0, \psi) = v_0(\psi)$. Здесь v_0 — достаточно гладкая, положительная при $0 \leq \psi \leq 1$ функция, удовлетворяющая некоторым условиям согласования. Доказывается, что сформулированная краевая задача для уравнения (8) имеет единственное решение при всех $\xi > 0$.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. Mises, Zs. angew. Math. u. Mech., 7, 425 (1927). ² Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 2, М., 1963. ³ Н. Н. Моисеев, Журн. прикл. мех. и техн. физ., в. 3, 81 (1960). ⁴ В. Н. Монахов, Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, ч. 2, Новосибирск, 1969. ⁵ С. Н. Антонцев, О. Ф. Васильев и др., Сборн. Некоторые вопросы прикладной и вычислительной матем., Новосибирск, 1966. ⁶ В. В. Пухачев, Журн. прикл. мех. и техн. физ., в. 3, 91 (1972). ⁷ С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, 1, М., 1962. ⁸ М. П. Маркова, В. Я. Шкадов, Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, в. 3, 30 (1972).