Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 2

УДК 517.512 *МАТЕМАТИКА*

Р. А. РАЙЦИН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 28 IX 1972)

В 1946 г. С. М. Никольский ([3]) показал, что для функций, удовлетворяющих условию Липшица первой степени с константой M на отрезке $[-1, 1]$, существует последовательность многочленов $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ таких, что

$$(n+1)\,|f(x)-P_n(x)|\leqslant \frac{\pi}{2} M\sqrt{1-x^2}+|x|\,O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

равномерно относительно x на интервале $(-1, 1)$.

Впоследствии А. Ф. Тиман ([8]) доказал, что каким бы ни было натуральное r для любой функции $f(x)$, имеющей $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную и производную порядка r, для которой $|f^{(r)}(x)|\leqslant M$, существует последовательность многочленов $P_n(x)$, обладающих тем свойством, что в каждой точке $x\in[-1, 1]$

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^r\,|f(x)-P_n(x)|\leqslant MK_r(\sqrt{1-x^2})^r,$$

где

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Для доказательства соответствующего утверждения в случае дробного значения r метод А. Ф. Тимана не применим. Используя другую схему доказательства, в основе которой лежат идеи С. Н. Бернштейна — его замечательная предельная теорема ([2]), — мы покажем, что имеет место следующее более общее предложение.

Теорема 1. *Для любой функции $f(x)$ вида*

$$f(x)=\int_{-1}^{1} f_{a,b}^{(r)}(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где

$$f_{a,b}^{(r)}(x)=(ax+b|x|)\,|x|^{r-2},\quad r>0,\quad \operatorname*{vrai\,sup}_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\varphi(x)|\leqslant M,$$

существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такая, что при всех $x\in[-1, 1]$

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^r\,|f(x)-P_n(x)|\leqslant B_r\,|\underline{\varphi}(x)|\,(\sqrt{1-x^2})^r, \tag{2}$$

где $B_r=A_1[f_{a,b}^{(r)}(x)]_L$ — наилучшее приближение функции $f_{a,b}^{(r)}(x)$ целыми функциями степени $\leqslant 1$ на всей действительной оси в метрике пространства $L(-\infty, \infty)$, а

$$|\underline{\varphi}(x)=\lim_{\delta\to 0}\ \operatorname{vrai}\sup_{x-\delta\leqslant t\leqslant x+\delta}|\varphi(t)|.$$

Наметим вкратце схему рассуждений при доказательстве этой теоремы.

1. Если $x = \cos y$, $t = \cos\theta$, то

$$f(\cos y) = \frac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2\pi} f_{a,b}^{(r)}\left(2\sin\frac{\theta+y}{2}\sin\frac{\theta-y}{2}\right)\varphi(\cos\theta)\,|\sin\theta|\,d\theta. \qquad (3)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{4} f_{a,b}^{(r)}\left(2\sin\frac{\theta+y}{2}\sin\frac{\theta-y}{2}\right) = 2^{r-4} f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{\theta+y}{2}\right) f_{1,1}^{(r)}(\sin\theta) +$$
$$+ 2^{r-4} f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{\theta-y}{2}\right) f_{1,1}^{(r)}(\sin\theta) + 2^{r-4} f_{a,b}^{(r)}\left(-\sin\frac{\theta+y}{2}\right) f_{1,1}^{(r)}(-\sin\theta) +$$
$$+ 2^{r-4} f_{a,b}^{(r)}\left(-\sin\frac{\theta-y}{2}\right) f_{1,1}^{(r)}(-\sin\theta) + g(y, \theta),$$

и после простых преобразований получим

$$f(\cos y) = 2^{r-3}\int_{-2\pi}^{2\pi} f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right) f_{1,1}^{(r+1)}[\sin(z+y)]\,\varphi[\cos(z+y)]\,dz +$$
$$+ 2^{r-3}\int_{-2\pi}^{2\pi} f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right) f_{1,1}^{(r+1)}[\sin(z-y)]\,\varphi[\cos(z-y)]\,dz + \psi(y), \qquad (4)$$

где

$$\psi(y) = \int_{-2\pi}^{2\pi} g(y,\theta)\,\varphi(\cos\theta)\,|\sin\theta|\,d\theta$$

— четная периода 2π функция.

Можно показать, что существует четный тригонометрический полином $Q_n(\cos y)$ порядка n такой, что

$$|\varphi(y) - Q_n(\cos y)| = o\left(\frac{1}{n^r}\right). \qquad (5)$$

2. Обозначим через $E_n^{**}(f)_L$ (ср. ([9])) наилучшее приближение 4π-периодической функции $f(z)$ в среднем тригонометрическими «полиномами» вида

$$T_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos\frac{kz}{2} + b_k\sin\frac{kz}{2},$$

т. е.

$$E_n^{**}(f)_L = \inf_{T_n^*(z)}\int_{-2\pi}^{2\pi} |f(z) - T_n^*(z)|\,dz.$$

Используя метод классической работы ([1]) (см. также ([9], [5], [6])), нетрудно показать, что для любых сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно найти такое N, что при каждом $n \geqslant N$ существует тригонометрический «полином» $T_{2n}^*(z)$ порядка $2n$, удовлетворяющий неравенствам

$$\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}\left|f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right) - T_{2n}^*(z)\right|dz < (1+\varepsilon)\,E_{2n}^{**}\left[f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right)\right]_L,$$
$$\int_{-2\pi+\delta}^{-\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left|f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right) - T_{2n}^*(z)\right|dz < \varepsilon E_{2n}^{**}\left[f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right)\right]_L. \qquad (6)$$

При помощи предельной теоремы С. Н. Бернштейна ([2]) в среднем (доказательство этой теоремы приведено в ([7])) можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} n^r E_{2n}^{**}\left[f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right)\right]_L = 2^{2-r}B_r, \qquad (7)$$

где $B_r = A_1[f_{a,b}^{(r)}(x)]_L$ — наилучшее приближении функции $f_{a,b}^{(r)}(x)$ целыми функциями степени $\leqslant 1$ в метрике пространства $L(-\infty, \infty)$.

3. Выражение

$$2^{r-3}\int_{-2\pi}^{2\pi} T_{2n}^*(z) f_{1,1}^{(r+1)}[\sin(z+y)]\,\varphi[\cos(z+y)]\,dz +$$

$$+ 2^{r-3}\int_{-2\pi}^{2\pi} T_{2n}^*(z) f_{1,1}^{(r+1)}[\sin(z-y)]\,\varphi[\cos(z-y)]\,dz + Q_n(\cos y),$$

где $T_{2n}^*(z)$ — тригонометрический «полином» порядка $2n$, удовлетворяющий неравенствам (6), представляет собой четный тригонометрический полином $P_n(\cos y)$ порядка $\leqslant n$. Для разности $f(\cos y) - P_n(\cos y)$ мы имеем неравенство

$$|f(\cos y) - P_n(\cos y)| \leqslant |\psi(y) - Q_n(\cos y)| +$$

$$+ 2^{r-3}\int_{-2\pi}^{2\pi} \left| f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right) - T_{2n}^*(z)\right| f_{1,1}^{(r+1)}[\sin(z+y)]\,|\,\varphi[\cos(z+y)]\,|\,dz +$$

$$+ 2^{r-3}\int_{-2\pi}^{2\pi} \left| f_{a,b}^{(r)}\left(\sin\frac{z}{2}\right) - T_{2n}^*(z)\right| f_{1,1}^{(r+1)}[\sin(z-y)]\,|\,\varphi[\cos(z-y)]\,|\,dz.$$

Из полученного неравенства, непрерывности функции $f_{1,1}^{(r+1)}(\sin z)$, неравенств (6) и предельного равенства (7) вытекает (2).

З а м е ч а н и е. Из неравенства

$$\max\{E_n(ax|x|^{r-2})_L,\ E_n(b|x|^{r-1})_L\} \leqslant E_n[f_{a,b}^{(r)}(x)]_L \leqslant$$

$$\leqslant E_n(ax|x|^{r-2})_L + E_n(b|x|^{r-1})_L$$

вытекает (см. ([4], [1])) оценка для константы B_r:

$$\max\left\{\frac{8}{\pi}\left|a\sin\frac{\pi r}{2}\right|\Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r+1}},\ \frac{8}{\pi}\left|b\cos\frac{\pi r}{2}\right|\Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r+1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant B_r \leqslant \frac{8}{\pi}\left|a\sin\frac{\pi r}{2}\right|\Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r+1}} +$$

$$+ \frac{8}{\pi}\left|b\cos\frac{\pi r}{2}\right|\Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Т е о р е м а 2. *Для любой функции вида*

$$f(x) = \int_{-1}^{1} f_{a,b}^{(r,m)}(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $f_{a,b}^{(r,m)}(x) = (ax + b|x|)\,|x|^{r-2}\ln^m|x|$, $r > 0$, $m \geqslant 0$ *целое*, $\operatorname{vrai\,sup}_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\varphi(x)| \leqslant M$, *существует последовательность многочленов* $P_n(x)$ *степени* $\leqslant n$ *такая, что при всех* $x \in [-1, 1]$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^r}{\ln^m n}|f(x) - P_n(x)| \leqslant B_r|\varphi(x)|(\sqrt{1-x^2})^r.$$

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 с использованием приемов статьи ([6]).

Следует отметить, что в случае, когда r целое, неравенство (2) может быть усмотрено из доказательства, приведенного в статье А. Ф. Тимана (8).

Выражаю глубокую благодарность проф. А. Ф. Тиману за внимание к настоящей работе.

Поступило
26 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сочинения, 2, 1938, стр. 273. [2] С. Н. Бернштейн, Сочинения, 2, 1947, стр. 416. [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, 295 (1946). [4] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 139 (1947). [5] Р. А. Райцин, ДАН, **164**, № 1, 51 (1965). [6] Р. А. Райцин, ДАН, **173**, № 1, 44 (1967). [7] Р. А. Райцин, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 10, 81 (1968). [8] А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., **22**, 355 (1958). [9] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, 1960, стр. 439.