Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 519.45 *МАТЕМАТИКА*

М. К. ВАЛИЕВ

ПРИМЕРЫ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГРУПП

(*Представлено академиком П. С. Новиковым 24 X 1972*)

1. В работе ([1]) Г. Хигманом доказано, что любая группа G с рекурсивно-перечислимыми множествами образующих и определяющих соотношений (р.п.о. группа) вкладывается в конечно-определенную (к.о.) группу K_G. Из этого легко вытекает существование к.о. группы U, универсальной для всех к.о. групп в том смысле, что любая к.о. группа вкладывается в U (в качестве U можно взять K_G, где G — свободное произведение всех к.о. групп). Доказательство Г. Хигмана конструктивно в том смысле, что из конструктивного описания группы G можно в принципе извлечь описание для K_G, однако это построение настолько необозримо, что практически сделать это невозможно. В связи с этим М. Д. Гриндлингером поставлена задача (([2]), 1.17) явного построения универсальной к.о. группы. В настоящей заметке выписываются образующие и определяющие соотношения для одной такой группы. Эта группа (группа U_1) имеет 14 образующих и 42 определяющих соотношения. В заключение указываются некоторые возможности модификации построения группы U_1 с целью получения других примеров универсальных групп.

2. Введем некоторые обозначения. Слово w в образующих $a_1, a_2, \ldots$ обычно будем записывать в виде $w(a_1, a_2, \ldots)$. Если группа G задана образующими $a_1, a_2, \ldots$ и определяющими соотношениями $r_1(a_1, a_2, \ldots) = r_2(a_1, a_2, \ldots) = \ldots = 1$, то будем писать $G = \{a_1, a_2, \ldots;\ r_1 = r_2 = \ldots = 1\}$. Через $\{G, b_1, b_2, \ldots;\ R_1 = R_2 = \ldots = 1\}$ будем обозначать группу, которая получается из G добавлением образующих $b_1, b_2, \ldots$ и соотношений $R_1(a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots) = R_2(a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots) = \ldots = 1$. Равенство слов в группе G будем обозначать через $\underset{G}{=}$.

Пусть $G' = \{G, t;\ t^{-1}at = \varphi(a),\ a \in A\}$, где φ задает изоморфизм подгруппы A группы G на некоторую подгруппу из G. Тогда t называется *правильной проходной буквой* над G ([3]). Для G' справедлива

Лемма 1 ([4]). *Пусть $w(a_1, a_2, \ldots; t) \underset{G'}{=} 1$, где $a_1, a_2, \ldots$ — образующие группы G. Тогда либо w не содержит вхождений t^ε, $\varepsilon = \pm 1$, и $w \underset{G}{=} 1$, либо w содержит подслово одного из видов $t^{-1}at$, $t\varphi(a)t^{-1}$, $a \in A$.*

Доказательство. Если положить $t = rs^{-1}$, то группа G' вкладывается в свободное произведение K групп $\{G, r\}$ и $\{G, s\}$ с объединением подгрупп $\{G, r^{-1}Ar\}$, $\{G, s^{-1}\varphi(A)s\}$ в соответствии с изоморфизмом, тождественным на G и отображающим $r^{-1}ar$ на $s^{-1}\varphi(a)s$, $a \in A$ (([5]), см. также ([6]), стр. 247). Сделаем в слове w подстановку rs^{-1} вместо t. Получим слово w' из K вида $g_0(rs^{-1})^{\varepsilon_1}g_1(rs^{-1})^{\varepsilon_2}\ldots(rs^{-1})^{\varepsilon_k}g_k$, где g_i — слова из G. Тогда $w' \underset{K}{=} 1$ и из теоремы о нормальной форме для свободных произведений с объединенной подгруппой (см. ([6]), стр. 223) легко вытекает, что либо w' — слово из G и $w = 1$, либо w' содержит подслово одного из видов $sr^{-1}ars^{-1}$, $rs^{-1}\varphi(a)sr^{-1}$, т. е. w содержит подслово вида $t^{-1}at$ или $t\varphi(a)t^{-1}$, $a \in A$.

Из леммы 1 легко вытекают следующие утверждения.

Лемма 2 ([3,5]). *G вкладывается в G'.*

Лемма 3 (1). *Подгруппа* $\{G, t^{-1}Gt\}$ *группы* G' *является свободным произведением групп* $G, t^{-1}Gt$ *с объединением подгрупп* $t^{-1}At$, $\varphi(A)$.

3. Перейдем к построению универсальной группы U_1. Построение будет проведено в несколько этапов. Сначала выберем конкретное представление некоторой универсальной р.п.о. группы G с образующими a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots$

Пусть $H = \{h_1, h_2, \ldots; r_1 = r_2 = \ldots = 1\}$ — произвольная группа. Из теоремы IV работы (7) легко вытекает, что H вкладывается в группу с образующими a, b и соотношениями, которые получаются из $r_1, r_2, \ldots$ подстановкой слова $baba^{8i+8}baba^{8i+9} \ldots baba^{8i+15}$ вместо каждой из букв h_i. Отсюда следует, что любая группа вкладывается в группу с образующими a, b и соотношениями, не содержащими вхождений a^{-1}, b^{-1}, так как можно считать, что $r_1, r_2, \ldots$ не содержат вхождений h_i^{-1}. Поэтому нам достаточно построить группу, универсальную для всех к.о. групп с указанным выше свойством.

Пусть функция τ буквам a_i, b_i ставит в соответствие цифры 1, 2 следующим образом: $\tau(a_i) = 2$, $\tau(b_i) = 1$. Тогда любое натуральное число j можно записать как слово w_j^i в любом из алфавитов $\{a_i, b_i\}$, используя соответствие τ для расшифровки w_j^i как записи в двоичной системе счисления. Пусть $i = \sum_{j=0}^{l} \nu_j \cdot 2^j$; $\nu_j = 0, 1$; $j = 1, 2, \ldots, l$. Обозначим через $D(i)$ конечное множество равенств $\{w_j^i = 1 \mid \nu_{j-1} = 1\}$, через G_i — группу $\{a_i, b_i; D(i)\}$ и через G — свободное произведение групп G_i. Из сказанного выше следует, что G является универсальной для всех к.о. групп.

4. Вкладывая группу G в группу с образующими a, b, как было указано выше (принимая a_i в качестве h_{2i-1}, b_i — в качестве h_{2i}), получаем группу G_1. Множество определяющих соотношений для G_1 обозначим через R.

5. Определим некоторую полугруппу П. Образующими ее будут буквы a, b, $\tilde{a}$, p, q, а определяющие соотношения имеют следующий вид (в них буквы u_1, u_2 обозначают соответственно слова $baba^8baba^9 \ldots baba^{15}$, $babbabababa^2 \ldots baba^6baba^7$): 1) $b^3aba^{16} = b^3ab\tilde{a}$; 2) $\tilde{a}a = a\tilde{a}$; 3) $\tilde{a}baba^{16} = bab\tilde{a}$; 4) $\tilde{a}b^2 = b^2ab^2$; 5) $b^4 = pb^4$; 6) $b^2ap = pb^2a$; 7) $u_2p = u_1q$; 8) $au_1p = pu_2$; 9) $b^2u_1p = b^2q$; 10) $qu_2 = u_2q$; 11) $aq(b^2a)^2 = aqb^2a$; 12) $qb^4 = pb^4$; 13) $aqb^2ab^4 = pb^4$; 14) $b^2q(b^2a)^2 = b^2q$.

Если в П можно вывести слово w' из слова w с помощью вывода, у которого любое промежуточное слово имеет не более одного вхождения букв $\tilde{a}$, p, q (причем только одной из них), то это будем обозначать как $w \Vdash w'$.

Связь полугруппы П с группой G_1 ясна из следующей леммы (в ней через $\tilde{b}$ обозначено слово bab, через h — слово b^2 и через Ω — слово h^2qhah^2).

Лемма 4. 1) $w(a, \tilde{b}, h^2) \Vdash \Omega$ *тогда и только тогда, когда* w *имеет вид* $h^2w'(a, b)h^2$, *где* $w' \in R$.

2) *если* $w(a, b) \Vdash \Omega$ *и* w *не принадлежит подполугруппе* $\{a, \tilde{b}, h^2\}$, *то* w *имеет вид* $w'(a, b)ab^2ab^4$.

Доказательство леммы довольно просто, но громоздко, и мы его опустим. Заметим только, что система соотношений 1) — 4), если рассматривать их как направленные слева направо, по слову вида $h^2w(\tilde{b}a^{16i+8}\tilde{b}a^{16i+9} \ldots \tilde{b}a^{16i+15}, \tilde{b}a^{16i}\tilde{b}a^{16i+1} \ldots \tilde{b}a^{16i+7})h^2$ «выдает» слово $h^2w(u_1, u_2)(ha)^ih^2$, соотношения 5) — 14) «проверяют», кодирует ли слово $w(u_1, u_2)$ один из элементов множества $D(i)$ (если считать, что u_1, u_2 кодируют соответственно буквы b_i, a_i).

Замечание. При некотором усложнении остальных соотношений из полугруппы П можно убрать соотношения 4) — 5). При этом несколько осложняется также доказательство леммы, аналогичной лемме 4.

6. Теперь мы можем выписать все образующие и определяющие соотношения группы U_1. Образующими ее будут a, b, $\tilde{a}$, p, q, c, d, e, t, α, β, γ,

a', b', а соотношения имеют следующий вид (в (7 — 20) Σ_i и Γ_i обозначают соответственно левые и правые части определяющих соотношений полугруппы П):

(1—6) $d^{15}\xi = \xi d$, $e\xi = \xi e^{15}$, $\xi c = c\xi$, где $\xi = a, b$;

(7—20) $d^{-i}cd^i\Sigma_i = \Gamma_i e^i ce^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots, 14$;

(21—24) $c\alpha = \alpha c$, $d\alpha = \alpha d$, $ct = tc$, $et\alpha^{-1} = t\alpha^{-1}e$;

(25) $\beta^{-1}\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha\beta = \Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha$;

(26—27) $c\beta = \beta c$, $d\beta = \beta d$;

(28—31) $\xi\eta = \eta\xi$, где $\xi = a, b$; $\eta = a', b'$;

(32—33) $\gamma^{-1}\xi\xi'\gamma = \xi$, где $\xi = a, bab$;

(34—38) $\gamma^{-1}\beta^{-1}\xi\beta\gamma = \beta^{-1}\xi\beta$, где $\xi = a, bab, b^4, t, \alpha$;

(39—40) $\gamma^{-1}\alpha^{-1}\xi\alpha\gamma = \alpha^{-1}\xi\alpha$, где $\xi = a, b$;

(41—42) $\gamma^{-1}b^4\gamma = b^4$, $\gamma^{-1}t\gamma = t$.

Обозначим через G_2 группу с образующими a, b, $\tilde{a}$, p, q, c, d, e и соотношениями (1—20), через G_3 — группу, получаемую из G_2 добавлением образующих α, t и соотношений (21—24), через G_4 — группу, получаемую из G_3 добавлением образующей β и сотношений (25—27).

Заметим, что группа G_2 почти совпадает с группой Γ_2 из ([8]), если взять в качестве исходной полугруппы для построения Γ_2 полугруппу П. Для G_2 имеет место следующая лемма, доказательство которой по существу можно извлечь из доказательства теоремы 1 работы ([8]).

Лемма 5. *Если P и Q — слова из полугруппы* П, *то $P \Vdash Q$ тогда и только тогда, когда существуют слова $L(c, d)$ и $R(c, e)$ такие, что $LQR \underset{G_2}{=} P$.*

7. Используя лемму 5, для группы G_3 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 6.

$$\{h^2w(a, b)h^2t\alpha^{-1}h^{-2}w^{-1}(a, b)h^{-2}\alpha \mid w \in R\} = \\ = \{\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha, c, d\} \cap^2 \{h^2, a, \tilde{b}, \alpha, t\}.$$

Напомним, что R обозначает множество определяющих соотношений для G_1.

Приведем набросок доказательства леммы. Включение $\subset$ можно доказать довольно легко, используя леммы 4, 5. Докажем обратное включение.

Прежде всего, заметим, что t можно рассматривать как правильную проходную букву над группой G_2', получающейся из G_2 добавлением образующей α и соотношений (21—22) (легко видеть, что подгруппы $\{c, e\}$ и $\{c, \alpha^{-1}e\alpha\}$ обе являются свободными ранга два и поэтому изоморфны).

Теперь пусть $w \underset{G_3}{=} w'$, где w имеет вид $w_0(a, \tilde{b}, h^2, \alpha)t^{\varepsilon_1}w_1(a, \tilde{b}, h^2, \alpha)t^{\varepsilon_2} \ldots t^{\varepsilon_k}w_k$, и w' имеет вид $w_0'(c, d)(\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha)^{\varepsilon_1'}w_1'(c, d) \times \times (\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha)^{\varepsilon_2'} \ldots w_l'(c, d)$. Нам надо показать, что w может быть записано в образующих $h^2vh^2t\alpha^{-1}h^{-2}v^{-1}h^{-2}\alpha$, $v \in R$. Докажем это индукцией по $k + l$.

Если $k + l = 0$, то легко видеть, что $w = w' = 1$. Если $k + l \neq 0$, то по лемме 1 в слове $w^{-1}w'$ должно быть подслово z одного из видов $t^{-1}\tilde{w}t$, где $\tilde{w} \in \{c, e\}$ или $t\tilde{w}t^{-1}$, где $\tilde{w} \in \{c, \alpha^{-1}e\alpha\}$.

Рассмотрим первый случай (второй случай аналогичен). z может входить в $w^{-1}w'$ одним из трех способов: либо z — подслово из w^{-1}, либо z — подслово из w', либо им является подслово $t^{-1}w_0^{-1}w_0'\Omega t$. В первом случае, как и в базисе индукции, $z = 1$. Во втором случае после несложных выкладок получаем равенство $w \underset{G_3}{=} w''(\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha, c, d)$, где w'' имеет $l-2$ вхождения буквы t.

Рассмотрим последний случай. Имеем равенство $w_0 = w_0'(c, d) \times \times \Omega\widetilde{w}(c, e)$. Легко доказывается, что при этом условии, если w_0 несократимо, то оно должно быть словом в положительных степенях образующих $a, \tilde{b}$, h^2 и, следовательно, согласно леммам 4, 5, w_0 имеет вид $h^2 v(a, \tilde{b}) h^2$, где $v \in R$. Кроме того, несложные подсчеты показывают, что $w_0 t\alpha^{-1} w_0^{-1}\alpha = w_0'\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1} w_0'^{-1}\alpha$. Поэтому $w = w'$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1} w_0 \alpha w_1 t^{\varepsilon_2} w_2 \ldots t^{\varepsilon_k} w_k = w_0' w_1' (\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha)^{\varepsilon_2'} \ldots (\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha)^{\varepsilon_l'} w_l'$. В правой части эквивалентности число вхождений t равно $k+l-2$, что и завершает индукционное рассуждение.

8. Легко показать, что подгруппа $\{a, b, \alpha, t\}$ группы G_4 свободна, следовательно, свободны также подгруппы $F = \{a, \tilde{b}, h^2, t, \alpha\}$ и $F' = \{a, \tilde{b}, h^2, t, \alpha^{-1} a\alpha, \alpha^{-1} b\alpha\}$.

Используя утверждение 2) леммы 4, для F' можно доказать следующий аналог леммы 6.

Лемма 6′. $\{h^2 w(a, b) h^2 t\alpha^{-1} h^{-2} w^{-1}(a, b) h^{-2}\alpha \mid w \in R\} = \{\Omega t\alpha^{-1}\Omega^{-1}\alpha, c, d\} \cap F'$.

Из лемм 6, 6′, используя леммы 2, 3, выводим следующие утверждения.

Лемма 7. *В G_4 справедливо равенство*

$$\{w \mid w \in R\} = \{h^2, t, \alpha^{-1} a\alpha, \alpha^{-1} b\alpha, \beta^{-1} F\beta\} \cap \{a, \tilde{b}\}.$$

Лемма 8. *Если $w \in \{F', \beta^{-1}F\beta\}$ и $w = 1$, то проекция w на алфавит образующих $a, \tilde{b}$ равна единице в группе G_1.*

Из леммы 8, используя заключительные рассуждения доказательства теоремы 1 из ([1]), получаем нашу основную теорему.

Теорема. *Группа G_1 вкладывается в U_1 и, следовательно, U_1 является универсальной для всех к.о. групп.*

9. Замечания. 1) Используя замечание из п. 5, можно выписать универсальную группу с 12 образующими и 40 соотношениями.

2) С помощью некоторой модификации рассуждений из ([9], [10]) можно построить полугруппу с 2 образующими и 3 определяющими соотношениями, которую можно использовать для построения универсальной группы с 2 образующими и 27 определяющими соотношениями (при этом используется теорема 2 из ([8]) для сокращения числа соотношений с 30 до 27).

3) Выбирая несколько иное кодирование букв a_i, b_i (типа $h_i \to a^i b a^i c^i b c^i$) для получения группы G_1 и несколько усложняя дальнейшие построения, можно доказать существование универсальной группы с 57 соотношениями, каждое из которых имеет длину, не большую, чем 20.

4) Метод построения группы U_1 можно применить для доказательства упомянутой в начале работы теоремы Хигмана. Для этого вместо полугруппы П нужно использовать полугруппу $П_G$, связанную с машиной Тьюринга T_G, вычисляющей частичную характеристическую функцию множества слов, равных единице в G. В этом случае дальнейшую часть конструкции можно значительно упростить.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
21 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Higman, Proc. Roy. Soc. A, 262, № 1311 (1961). [2] Коуровская тетрадь, Новосибирск, 1969. [3] П. С. Новиков, Тр. Матем. инст. АН СССР, 44 (1955). [4] J. L. Britton, Ann. Math., 77, № 1 (1963). [5] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, J. Lond. Math. Soc., 24 (1949). [6] А. Г. Курош, Теория групп, М., 1967. [7] R. C. Lyndon, Math. Ann., 166, 3 (1966). [8] В. В. Борисов, Матем. заметки, 6, № 5 (1969). [9] Г. С. Цейтин, Тр. Матем. инст. АН СССР, 52 (1958). [10] Ю. В. Матиясевич, ДАН, 173, № 6 (1967).