

УДК 539.126+530.145

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. ФАТЕЕВ, А. С. ШВАРЦ

ОДЕВАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 24 V 1972)

Рассмотрим трансляционно инвариантный гамильтониан $H = H_0 + gV$, где

$$H_0 = \int \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (1)$$

$$V = \sum \int V_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_m) a(\mathbf{l}_1) \dots a(\mathbf{l}_n) d^m \mathbf{k} d^n \mathbf{l},$$

$$V_{m,n} = v_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_m - \mathbf{l}_1 - \dots - \mathbf{l}_n),$$

$a^*(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ — символы, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям (ССР). Функции ω и $v_{m,n}$ предположим гладкими, функция ω должна быть строго выпуклой и удовлетворять условию $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$, а функции $v_{m,n}$ должны достаточно быстро убывать на бесконечности (например, быстрее любой степени). В случае, когда есть поляризация вакуума (т. е. при условии $v_{m,0} \neq 0$), гамильтониан H не определяет самосопряженного оператора в пространстве R фоковского представления ССР; мы будем поэтому рассматривать H как формальное выражение, не придавая ему операторного смысла. Однако для гамильтонианов вида (1) можно дать определение (перенормированной) матрицы рассеяния, а также указать диаграммную технику для ее вычисления по теории возмущений, причем все члены ряда по степеням g оказываются конечными (см. (1, 2)).

Все утверждения этой заметки (кроме теоремы 4) доказаны в рамках теории возмущений. В частности, совпадение двух операторов понимается как совпадение разложений этих двух операторов по степеням g в любом порядке по g . Все рассматриваемые нами объекты можно при желании рассматривать как формальные степенные ряды по g , никаких предположений о сходимости этих рядов не делается.

Рассмотрим случай, когда выражение H определяет самосопряженный оператор в пространстве R . Оператор D , действующий в пространстве R , будем называть одевающим оператором, если существует такой оператор $H_{\text{кв}}$ вида $\int \varepsilon(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, что матрица рассеяния S гамильтониана H может быть представлена в виде

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty; t_0 \rightarrow -\infty} \exp \{iH_{\text{кв}}t\} D^{-1} \exp \{-iH(t - t_0)\} D \exp \{-iH_{\text{кв}}t_0\}$$

(предел операторов, действующих в пространстве R , здесь и дальше понимается в смысле сходимости матричных элементов относительно обобщенного базиса $a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n) \Theta$, через Θ обозначен фоковский вакуум).

Теорема 1. Пусть оператор D_g удовлетворяет условиям: 1) вектора $D_g \Theta$ и $D_g a^*(\mathbf{k}) \Theta$ являются собственными векторами гамильтониана $H_0 + gV$ (точнее, $D_g a^*(\mathbf{k}) \Theta$ — обобщенный собственный вектор, нормированный на δ -функцию); 2) оператор D_g может быть представлен в виде $\exp A$ или

:exp A ; где

$$A = \sum \int A_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_m) a(\mathbf{l}_1) \dots a(\mathbf{l}_n) d^m \mathbf{k} d^n \mathbf{l},$$

$$A_{m,n} = \sum_{s=1} g^s a_{m,n}^s(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) \delta\left(\sum \mathbf{k}_i - \sum \mathbf{l}_j\right),$$

функции $a_{m,n}^s$ являются гладкими функциями и для каждого s только конечное число этих функций отлично от нуля.

Тогда оператор D_g является одевающим оператором для гамильтониана $H_0 + gV$.

Для того чтобы сформулировать аналог теоремы 1, пригодный и при наличии поляризации вакуума, следует ввести обрезание гамильтониана H по объему. Обрезав гамильтониан H по объему (например, с помощью замены интегралов в выражении (1) на суммы по решетке T_Ω с шагом $2\pi\Omega^{-1/3}$), мы получим выражение H^Ω , которое, как правило, задает сопряженный оператор в пространстве фоковского представления CCR:

$$[a_k, a_l] = [a_k^*, a_l^*] = 0; \quad [a_k, a_l^*] = \delta_l^k; \quad \mathbf{k}, \mathbf{l} \in T_\Omega$$

(более подробные определения используемых здесь понятий можно найти в статье ⁽²⁾, обозначениям которой мы следуем). Семейство операторов D^Ω , действующих в пространстве R_Ω (и зависящих от параметра Ω), будем называть семейством одевающих операторов, если существует такой оператор $H_{\text{кв}}^\Omega$ вида $\sum_{\mathbf{k}} \varepsilon^\Omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + C^\Omega$, что оператор

$$i_\Omega \exp\{iH_{\text{кв}}^\Omega t\} (D^\Omega)^{-1} \exp\{-iH^\Omega(t-t_0)\} D^\Omega \exp\{-iH_{\text{кв}}^\Omega t_0\} i_\Omega^*$$

при $t \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow -\infty$, $\Omega \rightarrow \infty$, $(|t| + |t_0|)\Omega^{-1/3} \rightarrow 0$ стремится к матрице рассеяния S (через i_Ω обозначено естественное вложение пространства R_Ω в R).

Теорема 2. Пусть операторы $D^\Omega = D_g^\Omega$ удовлетворяют условиям: 1) векторы $D^\Omega \Theta$ и $D^\Omega a_{\mathbf{k}}^* \Theta$, где $\mathbf{k} \in T_\Omega$, являются стационарными состояниями гамильтониана $H_0^\Omega + gV^\Omega$, причем $\|D^\Omega \Theta\| = \|D^\Omega a_{\mathbf{k}}^* \Theta\| = 1$; 2) оператор D^Ω может быть представлен в виде $D^\Omega = \exp A_\Omega$ или в виде $D^\Omega = : \exp A_\Omega :$, где A_Ω получается обрезанием по объему из оператора A , удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Тогда операторы D^Ω образуют семейство одевающих операторов.

Утверждение теоремы остается справедливым, если в условии 2) считать, что $D^\Omega = \exp A_\Omega^{(n+m)} \dots \exp A_\Omega^{(n+1)} : \exp A_\Omega^{(n)} : \dots : \exp A_\Omega^{(1)} :$, где все операторы $A^{(1)}, \dots, A^{(n+m)}$ удовлетворяют требованиям, наложенным в теореме на оператор A .

Следствие. Определения матрицы рассеяния, указанные в работах Л. Д. Фаддеева ⁽¹⁾ и И. Я. Арефьевой ⁽³⁾, совпадают с обычным определением (перенормированной) матрицы рассеяния.

В самом деле, эти определения сводятся к конкретному выбору одевающих операторов D^Ω , причем в ⁽¹⁾ оператор D^Ω записывается в виде $\exp A_\Omega$, а в ⁽³⁾ в виде $: \exp A_\Omega :$, где A удовлетворяет условиям теоремы 1.

Теорема 3. Пусть

$$b(\mathbf{k}) = \sum \int D_{m,n}(\mathbf{k} | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) a^*(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{l}_n) d^m \mathbf{k} d^n \mathbf{l}$$

— каноническое преобразование, коэффициентные функции которого имеют вид $D_{m,n} = \sum_s g^s b_{m,n}^s(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) \delta\left(\sum \mathbf{k}_i - \sum \mathbf{l}_j - \mathbf{k}\right)$, где

$b_{m,n}^s$ — гладкие функции, причем для каждого s только конечное число этих функций отлично от нуля.

Тогда матрица рассеяния гамильтониана вида (1) не меняется при этом каноническом преобразовании.

Это означает, что подставив в гамильтониан H вместо символов $a^*(k)$, $a(k)$ выражения $b^*(k)$, $b(k)$ и приведя получившееся выражение к нормальной форме с помощью CCR, мы получим гамильтониан $\tilde{H}$, имеющий ту же матрицу рассеяния, что и гамильтониан H . Теорема 3 близка к теореме эквивалентности Чисхольма ⁽⁴⁾. Отметим, однако, что, как было выяснено в работе ⁽⁵⁾, доказательство Чисхольма имеет серьезные недостатки. Доказательство теоремы эквивалентности, указанное в ⁽⁵⁾, по существу не устраняет дефектов рассуждения Чисхольма и при этом содержит другие, еще более существенные пробелы.

Наметим доказательство теорем 1–3 с помощью некоторых теорем аксиоматической теории рассеяния ⁽⁶⁾. Будем называть операторной реализацией гамильтониана H гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором действуют коммутирующие самосопряженные операторы энергии и импульса $\hat{H}$, $\hat{P}$ и операторные функции $a(k, t)$, обобщенные по k , такие, что $a^*(k, t)$, $a(k, t)$ удовлетворяют гейзенберговским уравнениям, которые можно формально написать по гамильтониану H и при фиксированном t подчинены CCR, операторы H и $\hat{P}$ обладают следующими естественными свойствами:

$$e^{i\hat{H}t} a(k, \tau) e^{-i\hat{H}t} = a(k, \tau + t); \quad e^{-i\hat{P}a} a(k, t) e^{i\hat{P}a} = e^{-iak} a(k, t),$$

а основное состояние Φ оператора $\hat{H}$ является циклическим вектором семейства операторов $a^*(f, t)$, $a(f, t)$, где $a(f, t) = \int f(k) a(k, t) dk$; $f \in \mathcal{S}$. В случае, если формальный гамильтониан H не порождает поляризации вакуума, он (по крайней мере, в рамках теории возмущений) определяет самосопряженный оператор $\tilde{H}$ в фоковом пространстве, который вместе с операторами

$$\hat{P} = \int k a^*(k) a(k) dk \quad \text{и} \quad a(k, t) = e^{i\hat{H}t} a(k) e^{-i\hat{H}t}$$

задает операторную реализацию гамильтониана H .

В общем случае операторную реализацию гамильтониана H можно построить, например, с помощью канонического преобразования, указанного Л. Д. Фаддеевым в ⁽⁴⁾. При этом нужно воспользоваться следующим утверждением: если гамильтониан $\tilde{H}$ получается из H с помощью канонического преобразования, то из операторной реализации $(\mathcal{H}, \hat{H}, \hat{P}, \tilde{a}(k, t))$ гамильтониана $\tilde{H}$ можно получить операторную реализацию гамильтониана H , оставив $\mathcal{H}$, $\hat{H}$ и $\hat{P}$ прежними и заменив $\tilde{a}(k, t)$ операторными обобщенными функциями $a(k, t)$, выражаемыми через $\tilde{a}^*(k, t)$, $\tilde{a}(k, t)$ так же, как $b(k)$ через $a^*(k)$, $a(k)$.

По операторной реализации гамильтониана H построим алгебру $\mathcal{A}$, порожденную операторами $a^*(f, t)$, $a(f, t)$. Нетрудно проверить, что вместе с операторами энергии и импульса $\hat{H}$ и $\hat{P}$ алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям, наложенным в ⁽⁶⁾; следовательно, мы можем построить по этим объектам матрицу рассеяния. Эта матрица рассеяния совпадает с (перенормированной) матрицей рассеяния, построенной по гамильтониану H с помощью диаграмм Фейнмана. Если гамильтониан $\tilde{H}$ получается из H с помощью канонического преобразования, то алгебра $\mathcal{A}$, порожденная операторами $\tilde{a}^*(f, t)$, $\tilde{a}(f, t)$, асимптотически коммутирует с алгеброй $\mathcal{A}$ и, значит, по теореме 2 статьи ⁽⁶⁾, матрицы рассеяния гамильтонианов H и $\tilde{H}$ совпадают. Это доказывает теорему 3. Теорема 1 вытекает из следующего утверждения, представляющего собой другую формулировку теоремы 4 статьи ⁽⁶⁾ (мы пользуемся обозначениями ⁽⁶⁾, считая, что существует только одно одночастичное состояние $\Phi(k)$).

Теорема 4. Пусть оператор D , действующий из пространства $\mathcal{H}_{as}$ в пространство $\mathcal{H}$, переводит голый вакуум Θ в физический вакуум Φ ,

голое одночастичное состояние $a^*(\mathbf{k})\Theta$ — в одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k})$ гамильтониана H и обладает следующим свойством «распадения корреляций» при $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\langle A_1(\sigma_1) \dots A_n(\sigma_n) D\xi(t), D\xi(t) \rangle \approx \langle \bar{A}_1(\sigma_1) \dots \bar{A}_n(\sigma_n) \xi(t), \xi(t) \rangle,$$

$$\langle A_1(\sigma_1) \dots A_n(\sigma_n) D\Theta, D\xi(t) \rangle \approx \langle \bar{A}_1(\sigma_1) \dots \bar{A}_n(\sigma_n) \Theta, \xi(t) \rangle$$

с ошибкой, не превышающей $C_N n^N(\sigma)(|t|^{-N} + d^{-N})$ (здесь $A_i \in \mathfrak{A}$, $S_{\mp}\xi \in D_{\mp}$).

Тогда матрицы Меллера $S_{\mp}$ могут быть записаны в виде

$$S_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp\{iHt\} D \exp\{-iH_{as}t\}$$

(если D — ограниченный оператор, то предел можно считать сильным).

С помощью теоремы 4 можно доказать также теорему 2 для случая гамильтонианов, не порождающих поляризации вакуума. В общем случае доказательство теоремы 2 сводится к этому частному случаю посредством фаддеевского преобразования. Перенос сформулированных выше результатов на фермиевский случай не вызывает затруднений.

Используя доказанные выше теоремы, можно указать такие условия того, чтобы оператор был в естественном смысле in-одевающим или out-одевающим.

Пользуемся случаем выразить благодарность Л. Д. Фаддееву и И. Я. Арефьевой за интересные обсуждения.

Московский инженерно-физический институт

Поступило
4 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Д. Фаддеев, ДАН, **152**, 573 (1963). ² В. Н. Лихачев, Ю. С. Тюпкии, А. С. Шварц, Журн. теоретич. и матем. физ., **10**, № 1, 61 (1972). ³ И. Я. Арефьева, Журн. теоретич. и матем. физ., **14**, № 1, 3 (1973). ⁴ J. S. R. Chisholm, Nucl. Phys., **26**, 469 (1961). ⁵ S. Kamefuchi, L. O' Raifeartaigh, A. Salam, Nucl. Phys., **28**, 529 (1961). ⁶ В. А. Фатеев, А. С. Шварц, Журн. теоретич. и матем. физ., **14**, № 2, 152 (1973).