Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 530.1+539.12 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Академик АН БССР Ф. И. ФЕДОРОВ

О ПОДГРУППАХ КОМПЛЕКСНОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Комплексная группа Лоренца $SO(4, C)$ широко применяется в аксиоматической квантовой теории поля. Вопрос о ее подгруппах может быть решен на основе общей теории непрерывных групп. Однако при этом мы получим абстрактное описание подгрупп, в то время как в теоретической физике используется конкретная их реализация, связанная с той или иной параметризацией. Наиболее просто и элементарно этот вопрос может быть рассмотрен на основе комплексной векторной параметризации группы $SO(3, C)$. Самое общее преобразование этой группы имеет вид $O(\mathbf{q}) = 2(1-\mathbf{q}^\times)^{-1} - 1$ (7), где $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ — трехмерный комплексный вектор-параметр, $\mathbf{q}^\times$ — дуальная ему антисимметричная (3×3)-матрица (1, 2). Перемножая два преобразования, имеем $O(\mathbf{q})O(\mathbf{q}') = O(\langle\mathbf{q}, \mathbf{q}'\rangle)$ (3), где

$$\langle\mathbf{q}, \mathbf{q}'\rangle = \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}' + [\mathbf{q}\mathbf{q}']}{1 - \mathbf{q}\mathbf{q}'} \tag{1}$$

есть формула композиции комплексных вектор-параметров. На $\mathbf{q}$ налагается единственное ограничение

$$1 + \langle -\mathbf{q}^*, \mathbf{q}\rangle^2 = \left|\frac{1+\mathbf{q}^2}{1+|\mathbf{q}|^2}\right|^2 \neq 0, \tag{2}$$

а в остальном все 6 компонент вещественных 3-векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ совершенно произвольны. Подгруппу вещественных вращений мы получим, считая вектор $\mathbf{q}$ вещественным: $\mathbf{q} = \mathbf{q}^* = \mathbf{n}$, при этом условие (2) отпадает. Вообще для нахождения подгрупп комплексной группы вращений нужно отыскать такие совокупности вектор-параметров $\mathbf{q}$, элементы которых в результате композиции (1) снова давали бы элемент той же совокупности.

Введем тройку векторов (аксиальный базис) $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^*$, обладающих свойствами

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{c}^2 = 1, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^{*2} = 0,$$
$$[\mathbf{c}\mathbf{e}] = -i\mathbf{e}, \quad [\mathbf{c}\mathbf{e}^*] = i\mathbf{e}^*, \quad |\mathbf{e}|^2 = \mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1. \tag{3}$$

Любой комплексный вектор $\mathbf{q}$ можно однозначно представить в виде

$$q = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{e} + \gamma\mathbf{e}^*, \quad \alpha = \mathbf{q}\mathbf{c}, \quad \beta = \mathbf{q}\mathbf{e}^*, \quad \gamma = \mathbf{q}\mathbf{e}. \tag{4}$$

Рассмотрим совокупность векторов, определяемую формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(C, \beta) = C\mathbf{c} + a\beta\mathbf{e} + b\beta^*\mathbf{e}^*; \tag{5}$$

здесь a, b — фиксированные вещественные числа, β — произвольное комплексное число, C — произвольное вещественное (при $ab \neq 0$) или комплексное (при $ab = 0$) число. Нетрудно убедиться, что при этих условиях композиция (1) двух векторов $\mathbf{q}(C, \beta)$ и $\mathbf{q}(C', \beta')$ дает снова вектор того же типа: $\langle\mathbf{q}(C, \beta), \mathbf{q}(C', \beta')\rangle = \mathbf{q}(C'', \beta'')$. Следовательно, соотношение (5) определяет подгруппу группы $SO(3, C)$, вернее несколько различных подгрупп в зависимости от выбора параметров a, b. Пусть α, α' — вещественные числа, тогда частными случаями (5) являются следующие значения вектор-параметра, каждый из которых порождает некоторую подгруппу:

$$\text{I. } \mathbf{q} = C\mathbf{c}.$$

1) $C = \alpha$; 2) $C = i\alpha$ $(\alpha^2 < 1)$; 3) $C = i\alpha$ $(\alpha^2 \neq 1)$; 4) $C = \alpha + i\alpha'$.

$$\text{II. } \mathbf{q} = C\mathbf{q}_1 \quad (\mathbf{q}_1^2 = 1,\ \mathbf{q}_1^* \neq \mathbf{q}_1 \neq -\mathbf{q}_1^*).$$

5) $C = \alpha$; 6) $C = i\alpha$ $(\alpha^2 < 1)$; 7) $C = i\alpha$ $(\alpha^2 \neq 1)$; 8) $C = \alpha + i\alpha'$.

$$\text{III. } \mathbf{q} = \beta\mathbf{e}.$$

9) $\beta = \alpha$; 10) $\beta = \alpha + i\alpha'$.

$$\text{IV. } \mathbf{q} = C\mathbf{c} + \beta\mathbf{e}.$$

11) $C = \alpha$; 12) $C = i\alpha$ $(\alpha^2 < 1)$; 13) $C = i\alpha$ $(\alpha^2 \neq 1)$; 14) $C = \alpha + i\alpha'$.

$$\text{V. } \mathbf{q} = \alpha\mathbf{c} + a\beta\mathbf{e} + b\beta^*\mathbf{e}^* \quad (ab > 0).$$

15) $a = b = 1$; 16) $a \neq b$.

$$\text{VI. } \mathbf{q} = \alpha\mathbf{c} + a\beta\mathbf{e} - b\beta^*\mathbf{e}^* \quad (ob > 0).$$

17) $a = b = 1$, $1 + \alpha^2 - 2|\beta|^2 > 0$; 18) $a = b = 1$, $1 + \alpha^2 - 2|\beta|^2 \neq 0$;
19) $a \neq b$, $1 + \alpha^2 - 2ab|\beta|^2 > 0$; 20) $a \neq b$, $1 + \alpha^2 - 2ab|\beta|^2 \neq 0$.

Среди полученных 20 подгрупп * имеется 13 подгрупп, неизоморфных между собою: 1—4, 9, 10, 11—15, 17, 18. Подгруппы 5—8, 16, 19, 20 изоморфны соответственно подгруппам 1—4, 15, 17, 18. За исключением подгрупп 4, 8, 14, во всех остальных случаях вектор-параметр $\mathbf{q}$ является канонически м ([5]): $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}^{*2}$.

Отметим, что подгруппы 1, 5 изоморфны группе $SO(2)$ обычных поворотов, а группы 3, 7 — группе $SO(1,1)$ или $SH(2)$ гиперболических поворотов вокруг фиксированной оси $\mathbf{c}$. Группа 9 (10) изоморфна группе Z вещественных (комплексных) треугольных матриц $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (см., например, ([6])) или же группе сдвигов на прямой (плоскости). Группа 11 изоморфна группе $E(2)$ движений эвклидовой плоскости ([6]) или малой группе Лоренца, принадлежащей светоподобному вектору ([7]). Группа 13 изоморфна группе движений псевдоэвклидовой плоскости. Группы 15, 16 изоморфны группе трехмерных вращений $SO(3)$ или же малой группе Лоренца, принадлежащей времениподобному вектору. Наконец, группы 18, 20 изоморфны группе $SO(2,1)$ или малой группе Лоренца, принадлежащей пространственно-подобному вектору.

Таким образом, обширная совокупность наиболее широко применяемых групп (см. ([6])) получается из одной единственной формулы (5) для комплексных вектор-параметров группы $SO(3, C)$, если придавать различные частные значения входящим в нее параметром **.

Поскольку собственная ортохронная группа Лоренца изоморфна произведению $O(\mathbf{q}) \times O(\mathbf{q}^*)$ ([7], [8]), то ясно, что каждой из полученных выше 20 подгрупп группы $SO(3, C)$ соответствует подгруппа группы Лоренца. Конкретная форма преобразований этих подгрупп получается непосредственно из приведенного в ([3]) выражения для общего преобразования группы Лоренца

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*) = \alpha_+(\mathbf{q})\,\alpha_-(\mathbf{q}^*), \quad \alpha_\pm(\mathbf{q}) = \frac{1 + \mathbf{q}_\pm}{\sqrt{1 + \mathbf{q}^2}}, \quad \mathbf{q}_\pm = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^\times & \pm\mathbf{q} \\ \mp\mathbf{q} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

если подставить в него вместо $\mathbf{q}$ соответствующий частный случай формулы (5). Отметим, что

$$\mathbf{q}_+\mathbf{q}'_- = \mathbf{q}'_-\mathbf{q}_+, \quad \alpha_\pm(\mathbf{q})\,\alpha_\pm(\mathbf{q}') = \alpha_\pm(\langle\mathbf{q}, \mathbf{q}'\rangle). \tag{7}$$

---

* Мы не рассматриваем дискретных подгрупп.

** Заметим, что подгруппы 5—8, соответствующие случаю II, получаются из случая IV, если написать вектор-параметр в виде $\mathbf{q} = C(\mathbf{c} + \beta'\mathbf{e})$ и фиксировать β' (поскольку $(\mathbf{c} + \beta'\mathbf{e})^2 = 1$).

Комплексная группа Лоренца $SO(4, C)$, согласно ([4]), параметризуется двумя независимыми комплексными векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$, каждый из которых компонируется по формуле (1). Общее преобразование этой группы (ср. (6)) имеет вид $L(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = \alpha_+(\mathbf{q})\alpha_-(\mathbf{g})$. Таким образом, если для группы $SO(3, C)$ возможные подгруппы определялись заданием вида вектора $\mathbf{q}$, то для группы $SO(4, C)$ подгруппы будут определяться заданием пары векторов $\mathbf{q}$, $\mathbf{g}$. Каждый из них мы можем взять в одной из форм, соответствующих рассмотренным выше 20 подгруппам $SO(3, C)$. Рассмотрим сперва 13 неизоморфных между собой подгрупп 1—4, 9, 10, 11—15, 17, 18. Каждому сочетанию двух различных векторов, например $\mathbf{q} = \alpha\mathbf{c}$ (подгруппа 1) и $\mathbf{g} = i\alpha'\mathbf{c}' + \beta\mathbf{e}'$ (подгруппа 13), соответствует подгруппа группы $SO(4, C)$. Число таких сочетаний равно $13 \cdot 12/2 = 78$, чему соответствует такое же число неизоморфных между собою подгрупп комплексной группы Лоренца. Сюда следует еще добавить 13 подгрупп, получающихся при $\mathbf{q} = \mathbf{g}$, которые будут изоморфны соответствующим подгруппам $SO(3, C)$ ([4]). Кроме того, взяв, например, $\mathbf{q} = \alpha\mathbf{c}$, мы получим разные подгруппы $SO(4, C)$, полагая $\mathbf{g} = \alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{g} = \alpha\mathbf{c}'$, $\mathbf{g} = \alpha'\mathbf{c}$, либо $\mathbf{g} = \alpha'\mathbf{c}'$. Первые две, будучи однопараметрическими, изоморфны между собой, хотя и различаются за счет векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$. Подобным же образом различаются между собой две последние изоморфные подгруппы, являющиеся двухпараметрическими.

Аналогично при других сочетаниях $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$, взятых из числа упомянутых 13 подгрупп, мы можем выбирать параметры α, β и базисные векторы $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ в выражениях для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$ как одинаковыми, так и различными. При этом необходимо, чтобы предполагаемое равенство некоторых параметров в обоих векторах сохранялось при композиции (1). Во всяком случае мы можем брать векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$, относящиеся к одному и тому же типу, но со всеми различными параметрами α, β. Это даст еще 13 неизоморфных с другими подгрупп. Таким образом, общее число полученных описанным способом неизоморфных подгрупп группы $SO(4, C)$ достигает $78 + 2 \cdot 13 = 104$. Если же мы будем учитывать всевозможные сочетания векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$, относящихся ко всем 20 приведенным выше подгруппам $SO(3, C)$, включая изоморфные, но отличающиеся между собой по реализации, то общее число соответствующих подгрупп комплексной группы Лоренца превысит 200.

Приведенное рассмотрение показывает (см. ([3, 4, 7])), что простой закон композиции (1) представляет собой мощное и эффективное средство для изучения различных свойств групп $SO(3)$, $SO(3, C)$ и связанных с ними групп $SU(2)$, $SL(2, C)$, $SO(4)$, $SO(3, 1)$, $SO(4, C)$.

Институт физики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
21 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Федоров, Докл. АН БССР, 2, 408 (1958). [2] Ф. И. Федоров, Теоретич. и матем. физика, 2, 343 (1970). [3] Ф. И. Федоров, ДАН, 148, 56 (1962). [4] А. А. Богуш, Ф. И. Федоров, Теоретич. и матем. физика, 13, 67 (1972). [5] Ф. И. Федоров, Оптика анизотропных сред, 1958. [6] Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965. [7] Ф. И. Федоров, Тр. Гомельской международной школы по физике высоких энергий, Объед. инст. ядерн. исследов., № 2-63-71, Дубна, 1972. [8] Ф. И. Федоров, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем., 2, 85 (1967).