Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 2

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Г. П. АМИРДЖАНОВ

ПЛОТНОСТЬ, ЧИСЛО СУСЛИНА И ТЕСНОТА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 IV 1972)

Будем через $s(X)$ обозначать плотность пространства X, а через $c(X)$ — число Суслина. Полагаем, $cc(X)=\sup\{c(A)\colon A\subset X\}$. Определение тесноты $t(X)$ пространства X см. в [1]. Понятие свободной последовательности взято нами из [2]. Через $l(X)$ будем обозначать $\sup\{A\colon A\subset X$, A — свободная последовательность в $X\}$. В одной из своих работ W. W. Comfort ставит следующую задачу: охарактеризовать пространства, имеющие данный бикомпакт своим стоун-чеховским наростом. В теореме 1 исследуется этот вопрос. Метод построения свободной последовательности сходен с методом А. В. Архангельского из [2].

Теорема 1. *Пусть Y — бикомпакт, $c(Y)\leqslant\aleph_0$, $s(Y)>\mathfrak{c}$ и $Y=\beta X\backslash X$, тогда X — локально бикомпактное, псевдокомпактное пространство и $l(X)>\aleph_0$.*

Доказательство. Поскольку $Y=\beta X\setminus X$ — бикомпакт, то, очевидно, X — локально бикомпактное пространство. Если X не псевдокомпактно, тогда, как показал W. W. Comfort в [3], $c(\beta X\setminus X)\geqslant\mathfrak{c}$, что противоречит нашей первоначальной посылке. Таким образом, X — локально бикомпактное, псевдокомпактное пространство.

Если бы в каждую окрестность U произвольной точки $y\in\beta X\setminus X$ можно было вписать бикомпакт B_U такой, что $\chi(B_U,Y)\leqslant\aleph_0$, $B_U\subset U$ и $W(B)\leqslant\mathfrak{c}$, то тогда было бы возможно построить семейство $\gamma=\{B\}$, состоящее из бикомпактов счетного в Y характера, для каждого элемента $B\in\gamma$ выполнены следующие условия: $W(B)\leqslant\mathfrak{c}$ и $[\cup\{B\colon B\in\gamma\}]=\beta X\setminus X$. Тогда из леммы 6 из [2] вытекало бы, что $|\gamma|\leqslant\mathfrak{c}$ и, как показывают простые оценки, $s(Y)$ было бы не больше $\mathfrak{c}$, что противоречит нашим первоначальным предположениям. Таким образом, существуют такие точки $y\in\beta X\setminus X$ и ее окрестность U, удовлетворяющая следующим условиям: если $B\subset U$, B — бикомпакт, $\chi(B,Y)\leqslant\aleph_0$, то B не лежит в бикомпакте плотности $\aleph_0$.

Построим теперь свободную последовательность, лежащую в X и имеющую длину $\aleph_1$. Возьмем V — открытое в βX множество, для которого $V\cap(\beta X\setminus X)=U$. Определим для каждого $\alpha<\omega_1$ множества x_α, F_α, удовлетворяющие следующим требованиям: 1) F_α — бикомпакт, $\chi(F_\alpha,\beta X)\leqslant\aleph_0$ и $F_\alpha\subset V$. 2) $F_\alpha\cap(\beta X\setminus X)\neq\Lambda$, 3) $F_\alpha\subset F_\beta$ при $\alpha\leqslant\beta$, 4) $x_\alpha\in X$, 5) $x_\alpha\in F_\beta$ при $\alpha>\beta$, 6) $[\cup\{x_\beta\colon\beta\leqslant\alpha\}]\cap F_\alpha=\Lambda$. В качестве x_0 возьмем произвольную точку из X. Тогда из того факта, что βX — бикомпакт, следует существование бикомпакта Φ, для которого $\chi(\Phi,\beta X)\leqslant\aleph_0$ и $\Phi\subset V\setminus\{x_0\}$. Положим $F_0=\Phi$. Пусть для всех $\alpha<\lambda<\omega_1$ мы уже построили x_α, F_α, удовлетворяющие условиям 1)–6). Возьмем $A=\{x_\alpha\colon\alpha<\lambda\}$ и пусть $[A]_{\beta X}=B$, тогда из того, что $|A|\leqslant\aleph_0$, получаем $|B|\leqslant 2^{\mathfrak{c}}$.

Положим $\Phi=\cap\{F_\alpha\colon\alpha<\lambda\}$. Условие 3) гарантирует нам, что $\Phi\neq\Lambda$, Φ — бикомпакт. Далее, из счетности $\chi(F_\alpha,\beta X)$ и неравенства $|\lambda|\leqslant\aleph_0$ получаем $\psi(\Phi,\beta X)\leqslant\aleph_0$, а затем из транзитивности характера для бикомпактов выводим неравенство $\chi(\Phi,\beta X)\leqslant\aleph_0$, $\Phi\subset F_\alpha\subset V$ для $\alpha<\lambda$. Теперь, поскольку для каждого $\alpha<\lambda$ $F_\alpha\cap(\beta X\setminus X)\neq\Lambda$ и F_α, $\beta X\setminus X$

бикомпактны, мы имеем, что $\Phi \cap (\beta X \setminus X) \neq \Lambda$. Положим $\Phi \cap (\beta X \setminus X) = F$. Тогда F — бикомпакт счетного в $\beta X \setminus X$ характера. Действительно, так как Φ есть G_δ-множество в βX, то из бикомпактности $\beta X \setminus X$ следует, что $\chi(F, \beta X \setminus X) \leqslant \aleph_0$ и

$$F = \cap \{F_\alpha: \alpha < \lambda\} \cap (\beta X \setminus X) \subset F_0 \cap (\beta X \setminus X) \subset V \cap (\beta X \setminus X) = U.$$

Но тогда из выбора U имеем, что F не лежит в сепарабельном бикомпакте, а поэтому $F \setminus B \neq \Lambda$. Поскольку X — псевдокомпактное пространство, F есть G_δ-множество в βX, а B — замкнутое в βX множество, то $F \setminus B$ есть G_δ-множество в βX. Так как $F \setminus B \neq \Lambda$, то, по характеристическому свойству псевдокомпактных пространств, имеем $(F \setminus B) \cap X \neq \Lambda$. Возьмем $x_\lambda \in (F \setminus B) \cap X$. Далее, поскольку существует $x \in (F \setminus B) \cap (\beta X \setminus X)$, то существует также бикомпакт F' счетного в βX характера и такой, что $x \in F' \subset \beta X \setminus (B \cup \{x_\lambda\})$. Положим теперь $F_\lambda = \Phi \cap F'$. Легко видеть, что построенные таким образом x_λ, F_λ удовлетворяют условиям 1)—6). Построение завершено.

Заметим, что точки $\{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ образуют свободную последовательность в X длины $\aleph_1$. Действительно, если $\lambda < \omega_1$, то $[\cup\{x_\alpha: \alpha \leqslant \lambda\}] \cap F_\lambda = \Lambda$, как это следует из п. 6) нашего построения. Но, поскольку, F_λ — бикомпакт и $x_\alpha \in F_\lambda$ для $\alpha > \lambda$, то мы имеем, что $[\cup\{x_\alpha: \alpha > \lambda\}] \subset F_\lambda$, откуда $[\cup\{x_\alpha: \alpha \leqslant \lambda\}] \cap [\cup\{x_\alpha: \alpha > \lambda\}] = \Lambda$. Предложение доказано.

Лемма 1. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, $c(X) \leqslant \aleph_0$, $F \subset X$, F замкнуто в X и нигде не плотно, тогда существует такое Φ, что $F \subset \Phi$, Φ — замкнутое нигде не плотное в X множество и $\psi(\Phi, X) \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Существует семейство γ открытых попарно дизъюнктных в X множеств такое, что для каждого $U \in \gamma$ U есть F_σ-множество в X и $U \subset X \setminus F$, $[\cup\{U: U \in \gamma\}] = X$. Поскольку $c(X) \leqslant \aleph_0$, то $|\gamma| \leqslant \aleph_0$. Пусть $G = \cup\{U: U \in \gamma\}$. Тогда G есть открытое в X F_σ-множество, поэтому $F \subset X \setminus G$ — замкнутое G_δ-множество в X и $X \setminus G$ нигде не плотно в X.

Следствие 1. *Пусть X — нормальное пространство без изолированных точек и $c(X) \leqslant \aleph_0$, тогда $\gamma = \{F: F \subset X, F$ — замкнутое нигде не плотное G_δ-множество в $X\}$ есть сеть в пространстве X.*

Следствие 2. *Пусть X — T_3-пространство точечно-счетного типа без изолированных точек, тогда множество $\gamma = \{F: F \subset X, F$ — бикомпакт, $\chi(F, X) \leqslant \aleph_0$ и F — нигде не плотно в $X\}$ есть сеть в пространстве X.*

Теорема 2. *Пусть X — k-пространство, $t(B) \leqslant \aleph_0$[1] для каждого $B \subset X$, B — нигде не плотно в X и $c(X) \leqslant \aleph_0$. Тогда $t(X) \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$, $[A] \setminus A \neq \Lambda$. Положим $[A]_{\aleph_0} = \{x$: существует $A_0 \subset A$, $|A_0| \leqslant \aleph_0$, $x \in [A_0]\}$. Мы докажем, что $[A]_{\aleph_0} = [A]$. Пусть $[A]_{\aleph_0} \neq [A]$. Поскольку X — k-пространство, то существует бикомпакт F, для которого $F \cap [A]_{\aleph_0} = H$ — не замкнутое множество. Тогда $[H]_{\aleph_0} = H$. Возьмем $x \in [H] \setminus H$. Заметим, что $[H]$ не есть нигде не плотное множество в X, так как в противном случае из неравенства $t([H]) \leqslant \aleph_0$ следовало бы, что $[A]_{\aleph_0} = [A]$. Мы получили противоречие с равенством $[H]_{\aleph_0} = H$. Аналогично, легко доказать, что $x \in [\mathrm{Int}\,[H]] = \Phi$, $\Phi \subset F$, Φ — бикомпакт и, поскольку $c(\mathrm{Int}\,[H]) \leqslant \aleph_0$, то $c(\Phi) \leqslant \aleph_0$, $\Phi \setminus \mathrm{Int}\,[H]$ нигде не плотно в Φ и, следовательно, по лемме 1, существует M — нигде не плотный в Φ бикомпакт, $\chi(M, \Phi) \leqslant \aleph_0$, $\Phi \setminus \mathrm{Int}\,[H] \subset M$.

Покажем, что $[H] \cap M$ плотно в M. Действительно, если $V \subset M$, V открыто в M, то существует такой бикомпакт G, $G \subset V$, для которого $\chi(G, \Phi) \leqslant \aleph_0$. Заметим, что множество $H \cap \Phi$ плотно в Φ и, следовательно, если $\beta = \{O_i: i \in N\}$ — база G, то существуют такие x_i, что $x_i \in H \cap O_i$ для $i \in N$. Но тогда $[\cup\{x_i: i \in N\}] \cap G \neq \Lambda$, т. е. $[H]_{\aleph_0} \cap G \neq \Lambda$, и, поскольку $[H]_{\aleph_0} = H$, получим $H \cap G \neq \Lambda$. Таким образом, $H \cap M$ плотно в M. Но M нигде не плотно в Φ и, следовательно, существует $T \subset H \cap M$, $|T| \leqslant \aleph_0$, $x \in [T]$, т. е. $x \in [H \cap M]_{\aleph_0} \subset [H]_{\aleph_0} = H$. Получили противоречие. Таким образом, $[A]_{\aleph_0} = [A]$, а тогда $t(X) \leqslant \aleph_0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема остается верной также в случае, когда X — нормальное счетно-компактное пространство с условием Суслина, в котором $t(B) \leqslant \aleph_0$ для каждого $B \subset X$, B нигде не плотно в X.

З а м е ч а н и е 2. В случае, когда X — k-пространство, условие $t(B) \leqslant \aleph_0$ для каждого B, нигде не плотного в X, эквивалентно условию $t(B) \leqslant \aleph_0$ для каждого нигде не плотного в X бикомпакта B.

В лемме 1 существенно использовали нормальность топологического пространства, однако верно следующее

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть X — регулярное счетно-компактное пространство и $c(X) \leqslant \aleph_0$. Тогда семейство $\gamma = \{F\colon F \subset X$, F замкнуто в X и нигде не плотно $\psi(F, X) \leqslant \aleph_0\}$ есть π-сеть в пространстве X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in U \subset X$, U открыто в X. Поскольку X — регулярное топологическое пространство, то существует такая открытая окрестность U_1 точки x, что $x \in U_1 \subset [U_1] \subset U$. Легко построить по индукции семейство окрестностей $\{U_i\colon i \in N\}$, удовлетворяющих условию $x \in U_{i+1} \subset [U_{i+1}] \subset U_i$, где $i \in N$. Тогда $x \in \cap \{[U_i]\colon i \in N\} = \cap \{U_i\colon i \in N\} = F_1 \subset U$ и поэтому F_1 — замкнутое множество в X и $\psi(F_1, X) \leqslant \aleph_0$. Пусть $\operatorname{Int} F_1 \neq \Lambda$. Построим по трансфинитной индукции множества F_α для всех $\alpha < \omega_1$, удовлетворяющих следующим условиям: 1′) $\psi(F_\alpha, X) \leqslant \aleph_0$; 2′) $F_\alpha \subset U$ для $\alpha < \omega_1$; 3′) $F_\alpha \subset \operatorname{Int} F_\beta$ для каждого $\alpha > \beta$, причем $F_\alpha \neq \operatorname{Int} F_\beta$ ни для какого $\alpha > \beta$. Действительно, пусть мы уже построили F_α для всех $\alpha < \lambda$. Положим $F = \cap\{F_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, тогда по п. 3′) нашего построения имеем, что $F = \cap\{\operatorname{Int} F_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ и, следовательно, $\psi(F, X) \leqslant \aleph_0$. В силу счетной компактности пространства X, имеем, что $F \neq \Lambda$ и F замкнутое в X. Построенное таким образом семейство замкнутых множеств 1′)—3′) удовлетворяет условиям 1′)—3′). Положим теперь $U_\alpha = \operatorname{Int} F_\alpha \setminus F_{\alpha+1} \neq \Lambda$ для $\alpha < \omega_1$. Заметим теперь, что семейство $\gamma = \{U_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ есть семейство попарно дизъюнктных открытых в X множеств и $|\gamma| = \aleph_1$, что противоречит условию. Предложение доказано.

Б. Э. Шапировский доказал, что если X — топологическое пространство и $cc(X) \leqslant \aleph_0$, то в X существует $Y \subset X$, $[Y] = X$, Y — наследственно финально компактное подпространство. Следующая теорема является аналогом результата Б. Э. Шапировского.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $A \subset X$, A р а з д е л е н о с п р а в а, если существует такое упорядочение множества A, $A = \{x_\alpha\colon \alpha < \omega_\tau\}$, что для каждого $\lambda < \omega_\tau$ $[\cup\{x_\alpha\colon \alpha < \lambda\}] \cap (\cup\{x_\alpha\colon \alpha \geqslant \lambda\}) = \Lambda$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $A \subset X$, A р а з д е л е н о с л е в а, если существует такое упорядочение множества A, $A = \{x_\alpha\colon \alpha < \omega_\tau\}$, что для каждого $\lambda < \omega_\tau$ $(\cup\{x_\alpha\colon \alpha \leqslant \lambda\}) \cap [\cup\{x_\alpha\colon \alpha > \lambda\}] = \Lambda$.

A. Hajnel, J. Juhasz доказали, что если $|A| = \tau$ и A разделено справа и слева, то A содержит дискретное подмножество мощности τ.

Т е о р е м а 4. *Пусть X — пространство точечно-счетного типа, $cc(X) \leqslant \aleph_0$.*

Тогда существует такое $Y \subset X$, что $[Y] = X$ и Y является пространством точечно-счетного типа, финально компактным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть β — база в X, $|\beta| = \tau$. Вполне упорядочим β по типу ω_τ. Построим по трансфинитной индукции множества B_α такие, что: 1) B_α — бикомпакт, $\chi(B_\alpha, X) \leqslant \aleph_0$; 2) $B_\lambda \cap [\cup\{B_\alpha\colon \alpha < \lambda\}]$; 3) $(\cup\{B_\alpha\colon \alpha \leqslant \lambda\}) \cap U_\lambda \neq \Lambda$ для $\lambda < \omega_\tau$.

Действительно, пусть мы построили B_α для всех $\alpha < \lambda$. Рассмотрим $[\cup\{B_\alpha\colon \alpha < \lambda\}] = F$ — замкнутое в X множество. Если $(\cup\{B_\alpha\colon \alpha < \lambda\}) \cap U_\lambda \neq \Lambda$, то положим $B_\lambda = \Lambda$. Пусть $(\cup\{B_\alpha\colon \alpha < \lambda\}) \cap U_\lambda = \Lambda$, но тогда и $F \cap U_\lambda = \Lambda$. Поскольку X — пространство точечно-счетного типа, то существует бикомпакт B_λ, счетного в X характера, лежащий в U_λ. Легко видеть, что построенное нами множество B_λ удовлетворяет всем условиям 1)—3). Положим $Y = \cup\{B_\alpha\colon \alpha < \omega_\tau\}$. Пусть Y не финально компактное и $\gamma = \{V\}$ есть несчетное покрытие, из которого нельзя выделить счетного подпокрытия. Построим по трансфинитной индукции множества O_α, x_α

для всех $\alpha < \omega_1$, удовлетворяющих следующим условиям: 1*) $O_\alpha \subset O_\beta$ при $\beta < \alpha$, $O_\alpha = \cup\{V: V \in \eta \subset \gamma, |\eta| \leqslant \aleph_0\}$; 2*) если $x_\alpha \in B_{\mu(\alpha)}$, то $B_{\mu(\alpha)} \subset O_\alpha$; 3*) $x_{\alpha+1} \in O_{\alpha+1} \setminus O_\alpha$.

Действительно, пусть мы построили x_α, O_α для всех $\alpha < \lambda < \omega_1$. Возьмем $G = \cup\{O_\alpha: \alpha < \lambda\}$, тогда по выбору O_α имеем, что $Y \setminus G \neq \Lambda$, так как в противном случае существовало бы такое $x_\alpha \in B_{\mu(\alpha)}$, но тогда $B_{\mu(\alpha)} \subset O_\alpha$, откуда получается противоречие с непустотой $(Y \setminus G) \cap B_{\mu(\alpha)}$. Положим $x_\lambda = x$. Выберем конечное подпокрытие ξ бикомпакта $B_{\mu(\alpha)}$ и пусть $O_\lambda = G \cup (\cup\{V: V \in \xi\})$. Легко видеть, что выполняются требования 1)—3) нашего построения. В силу 1*), 3*) множество $A = \{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ разделено слева, а из п.2) следует, что множество A разделено и справа. Отсюда получаем, что A содержит дискретное подпространство мощности $\aleph_1$, что противоречит условию $cc(X) \leqslant \aleph_0$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. И. Пономареву за руководство работой, а также благодарность Б. Э. Шапировскому, который помог избавиться в теореме 4 от (CH).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, 182, № 5 (1968). [2] А. В Архангельский, ДАН, 192, № 2 (1970). [3] W. W. Comfort, Gordon Hugh, Trans. Am. Math. Soc., 111, № 3 (1964). [4] A. Hajnel, J. Iuhasz, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 70, № 3 (1967). [5] Б. Э. Шапировский, ДАН, 202, № 4 (1972). [6] М. М. Чобан, Вестн. Московск. унив., № 6, 87 (1967).