

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. БАЗАЛИЙ, В. Ю. ШЕЛЕПОВ

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком И. Н. Векун 1 VI 1972)

1. Рассматривается задача о нахождении области Ω и определенной в ней функции $u(x, y)$ по следующим условиям: а) область Ω расположена в нижней полуплоскости, ее граница не имеет самопересечений и состоит из полупрямых $x = \pm 1, y < 0$, совокупность которых мы обозначим через Γ , и некоей кривой γ с концами $(-1, 0), (1, 0)$; б) гармоническая внутри Ω функция $u(x, y)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, непрерывно дифференцируема в $\bar{\Omega}$, исключая, быть может, точки $(-1, 0), (1, 0)$, и удовлетворяет условиям

$$u(x, y) = 1 \text{ на } \gamma; \quad \partial u / \partial \nu + \alpha u = 0 \text{ на } \Gamma; \quad u \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty; \quad (1)$$

$$|\text{grad } u| = \lambda \text{ на } \gamma, \quad \lambda = \text{const}; \quad (2)$$

ν — внешняя нормаль, $\alpha = \text{const} > 0$.

Назовем эту задачу задачей А.

Эта задача моделирует тепловое равновесие в твердой фазе вещества, которое заполняет полосу $-1 \leq x \leq 1$ и находится в двух состояниях, твердом и жидком. Она возникает при изучении квазистационарной задачи Стефана. По своей природе она близка к кавитационным задачам гидродинамики ^(1, 2). Наличие неизвестной части границы и условие (2) делают ее существенно нелинейной. Вариационная природа тепловых проблем такого типа установлена в ⁽³⁾. В настоящей работе вариационным методом доказывается существование — и при некоторых естественных ограничениях — единственность решения задачи А. Всюду в дальнейшем считается, что $\lambda > \alpha$.

2. Приведем основные факты, относящиеся к линейной задаче о нахождении гармонической в заданной области Ω функции, которая непрерывна в $\bar{\Omega}$, непрерывно дифференцируема вплоть до Γ и удовлетворяет условиям (1) (задача В). При этом γ предполагается произвольной жордановой кривой.

Л е м м а 1. Если гармоническая функция $u(x, y)$ удовлетворяет второму и третьему условиям (1) и непрерывно принимает на γ неотрицательные значения $\varphi(x, y)$, то она неотрицательна в $\bar{\Omega}$ и принимает свое наибольшее значение на γ . Если $\varphi(x, y) \not\equiv 0$, то $u(x, y)$ положительна в $\bar{\Omega}$, за исключением тех точек, где $\varphi(x, y)$ обращается в нуль.

Обозначим через Π полуполосу $-1 \leq x \leq 1, y \leq 1$. Рассмотрим при фиксированной области Ω функционал

$$J(\Omega, u) = \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \alpha \int_{\Gamma} u^2 dy - \lambda^2 \iint_{\Pi \setminus \Omega} dx dy \quad (3)$$

на множестве функций, непрерывных в Ω , непрерывно дифференцируемых в $\Omega + \Gamma$, равных единице на γ и нулю на бесконечности, для которых $J(\Omega, u) < \infty$. Существует единственная функция $u(x, y)$, на которой функционал (3) достигает своего наименьшего значения. Эта функция является решением задачи В. Как доказано в ⁽⁴⁾, она может быть гармонически продолжена через Γ .

Решение $u^0(x, y)$ задачи В в полуполосе $-1 \leq x \leq 1, y \leq 0$ строится явно методом разделения переменных. Оно экспоненциально убывает на бесконечности. Отсюда с помощью леммы 1 получаем для решения задачи В в произвольной области Ω оценку

$$0 \leq u(x, y) \leq M \exp \lambda_0 y, \quad \lambda_0 > 0, \quad M = \text{const.} \quad (4)$$

Лемма 2. На решении задачи В функционал (3) может быть преобразован к виду

$$J(\Omega, u) = \alpha \int_{\Gamma} u dy - \lambda^2 \iint_{\Pi \setminus \Omega} dx dy.$$

3. Назовем глубиной свободной границы γ точную нижнюю грань ординат всех ее точек, взятую с обратным знаком. Введем обозначения

$$C_0 = \int_{-\infty}^0 u^0(1, y) dy, \quad H = \frac{\alpha C_0}{\lambda - \alpha}.$$

Рассмотрим теперь функционал (3) на множестве пар (Ω, u) таких, что свободная граница γ области Ω проходит через точки $(-1, 0), (1, 0)$, лежит в нижней полуплоскости и имеет глубину, не превосходящую $2H$, а функция $u(x, y)$ определена в Ω и обладает теми же свойствами, что и в п. 2. На этом множестве функционал (3) ограничен снизу. Обозначим через d его точную нижнюю грань и пусть (Ω_n, u_n) — минимизирующая последовательность: $\lim J(\Omega_n, u_n) = d$.

Будем говорить, что область Ω обладает свойством S , если кривая γ может быть задана уравнениями $x = x(t), y = y(t), -T \leq t \leq T$, где $x(t)$ — нечетная, а $y(t)$ — четная функции и обе они не убывают при $0 \leq t \leq T$.

Лемма 3. Если подвергнуть Ω симметризации Штейнера ⁽⁵⁾ относительно осей координат (она определяется через симметризацию $\Pi \setminus \Omega$) и заменить функцию $u(x, y)$ на $u^*(x, y)$ — решение задачи В в новой области, то $J(\Omega^*, u^*) \leq J(\Omega, u)$. Область Ω^* обладает свойством S , а функция $u^*(x, y)$ четна по x .

По поводу этой леммы см. ⁽⁴⁾. Благодаря ей минимизирующую последовательность можно считать состоящей из областей, обладающих свойством S , и функций, которые являются в них решениями задачи В. Тогда в системе координат (ξ, η) , повернутой относительно (x, y) на угол $\pi/4$ против часовой стрелки, правая половина дуги γ_n задается явным уравнением $\eta = \eta_n(\xi)$. Все функции $\eta_n(\xi)$ равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица с постоянной 1. Аналогичными свойствами обладает левая половина γ_n в соответствующей системе координат. Это позволяет считать, что γ_n равномерно сходятся к некоторой кривой γ . В принципе она могла бы содержать отрезок оси y , проходимый дважды. В дальнейшем мы покажем, что это невозможно. Однако γ может частично слиться с Γ вдоль отрезков $x = \pm 1, -b \leq y \leq 0$. В этом случае можно показать,

$$\text{что } \lim \int_{-b}^0 u_n(1, y) dy = b.$$

Области Ω_n сходятся к некоторой области Ω , обладающей свойством S . Она ограничена частью γ_0 кривой γ , не лежащей на Γ , и вертикалями $x = \pm 1, y < -b$. Последовательность гармонических функций $0 \leq u_n(x, y) \leq 1$ компактна, и можно считать, что они сходятся вместе с производными к функции $u(x, y)$, которая гармонична в Ω и на упомянутых вертикалях, где она удовлетворяет второму условию (1). Легко показать, что интеграл Дирихле функций $u(x, y)$ конечен.

Далее функция $u(x, y)$ может быть продолжена по непрерывности единичей в каждую точку кривой γ_0 . Достаточно рассмотреть ее правую половину γ_0^+ . Пусть сначала $z_0 = x_0 + iy_0$ — внутренняя точка γ_0^+ . Проведем

в плоскости $z = x + iy$ разрез вдоль луча l , проходящего через z_0 под углом $3\pi/4$ к оси абсцисс. Существует последовательность точек $z_n \in \gamma_n$, сходящаяся к z_0 вдоль l . Тогда можно показать, что при достаточно большом K для любого $z \in \Omega_n$

$$|u_n(z) - 1| \leq K \operatorname{Re} [e^{in/4}(z - z_n)]^{1/2}. \quad (5)$$

Если z — произвольная точка области Ω , то существует такое N , что $z \in \Omega_n$ при $n \geq N$. Поэтому наше утверждение получается из (5) последовательным переходом при $n \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow z_0$. Когда z_0 совпадает с одним из концов γ_0 , оно доказывается аналогично тому, как это сделано в (6), стр. 561.

Таким образом, функция $u(x, y)$ является в области Ω решением задачи В. По лемме 2

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy + 2\alpha \int_{-\infty}^{-b} u^2(1, y) dy = 2\alpha \int_{-\infty}^{-b} u(1, y) dy.$$

Ввиду равномерной сходимости $u_n(1, y)$ к $u(1, y)$ на $(-\infty, -b + \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$ и оценки (4), имеем

$$d = \lim \left(2\alpha \int_{-\infty}^0 u_n dy - \lambda^2 \iint_{\Pi \setminus \Omega_n} dx dy \right) = 2\alpha \left(\int_{-\infty}^{-b} u dy + b \right) - \lambda^2 \iint_{\Pi \setminus \Omega} dx dy.$$

Введем функцию $u'(x, y) = (x, y - b)$. Она является решением задачи В в области Ω' , которая получается из Ω сдвигом вдоль оси ординат вверх на b . При этом

$$J(\Omega', u') = 2\alpha \int_{-\infty}^{-b} u dy - \lambda^2 \left(\iint_{\Pi \setminus \Omega} dx dy - 2b \right) = d + 2b(\lambda^2 - \alpha).$$

Сделаем теперь следующее предположение: $\lambda^2 \leq \alpha$. Тогда $J(\Omega', u') \leq d$. Если бы кривая γ , а следовательно, и γ' , содержала отрезок оси ординат, проходимый дважды, то, отбросив его, мы получили бы допустимую область $\tilde{\Omega}$. Пусть $\tilde{u}(x, y)$ — решение в ней задачи В. Тогда, в силу лемм 1 и 2, $J(\tilde{\Omega}, \tilde{u}) < J(\Omega', u') \leq d$, что невозможно. Таким образом, пара (Ω', u') допустима и реализует минимум функционала (3) на множестве допустимых пар. Будем обозначать ее снова через (Ω, u) .

4. Часть γ_1 кривой γ , не лежащая на горизонталях $y = -2H$, $y = 0$, представляет собой аналитическую дугу в окрестности каждой своей точки. Вдоль нее функция $u(x, y)$ удовлетворяет условию $\partial u / \partial v = |\nabla u| = \lambda$. Доказательство этого может быть проведено методом внутренних вариаций Шиффера (2). Так как область Ω обладает свойством S , то остальная часть γ могла бы состоять только из отрезков горизонталей $y = -2H$, $y = 0$. Покажем, что на самом деле глубина γ строго меньше $2H$. Действительно, функция $u(x, y)$ принимает всюду на γ свое максимальное значение, следовательно, на ней $\partial u / \partial v \geq 0$. Поэтому, если бы глубина γ была $2H$, мы имели бы

$$4\lambda H \leq \int_{\gamma_1} \frac{\partial u}{\partial v} ds \leq \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial v} ds = \alpha \int_{\Gamma} u ds \leq 2\alpha(2H + C_0),$$

что противоречит определению числа H .

Если мы теперь предположим, что $\lambda^2 \geq \alpha$, то γ не может также содержать отрезков $[-1, -c]$, $[c, 1]$ оси x , $c > 0$. Пусть это не так. Представив функцию $u^0(x, y)$ из п.2 с помощью синус-преобразования Фурье по переменной y , найдем: $u_y^0(x, 0) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm 1$. Отсюда нетрудно вывести, что $u_y(x, 0)$ обладает тем же свойством.

На паре (Ω, u) вариация функционала (3) есть (см. (7))

$$\delta J(\Omega, u; \delta x, \delta u) = \int_{\gamma} (\lambda^2 - |\nabla u|^2) \delta x \cdot v ds.$$

Если вектор δx симметричен относительно оси y , отличен от нуля лишь в интервалах $(-1, -c')$, $(c', 1)$, где $|\nabla u| > \lambda$, и направлен по v , то $\delta J < 0$. Так что если $\delta = \max |\delta x|$ достаточно мало, то для проварьированной области $\tilde{\Omega}$ и решения задачи В в ней будем иметь: $J(\tilde{\Omega}, \tilde{u}) < J(\tilde{\Omega}, u)$. Просимметризуем $\tilde{\Omega}$ относительно оси y . От этого сумма первого и третьего слагаемого в (3) может лишь уменьшиться, а интеграл функций $\tilde{u}(1, y)^2$ от $-\infty$ до 0 перейдет в интеграл функции $\tilde{u}^*(1, y)^2$ от $-\infty$ до δ , увеличившись при этом не более чем на δ . Введем функцию $u'(x, y) = \tilde{u}^*(x, y + \delta)$. Тогда пара (Ω', u') , где Ω' получается из Ω сдвигом вниз на величину δ , является допустимой. При этом

$$J(\Omega', u') < J(\Omega, u) + 2\delta(\alpha - \lambda^2) \leq J(\Omega, u) = d,$$

что невозможно. Итак, доказана

Теорема. Если $\lambda^2 = \alpha < 1$, то существует решение задачи А. При этом свободная граница γ является аналитической кривой.

5. Физически оправдано искать такое решение задачи А, что $u(x, y)$ есть строго возрастающая функция от y при любом $x \in [-1, 1]$. С помощью симметризации легко убедиться, что решение, существование которого мы доказали, принадлежит этому классу. В этом классе задача имеет единственное решение. Оно дает абсолютный минимум функционалу (3). Это доказывается методом перехода к функционалу с постоянной областью интегрирования, принадлежащим Фридрихсу ⁽⁸⁾. Последнее утверждение позволяет установить, что при $\lambda > \alpha$ и $\lambda^2 > \alpha$ задача А не имеет решений в указанном классе.

Авторы пользуются случаем поблагодарить И. И. Данилюка, беседы с которым сыграли большую роль при изучении данной задачи, и В. С. Тена за ценные обсуждения.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
15 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Garabedian, Н. Lewy, М. Schiffer, Ann. Math., 56, 560 (1952).
² Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, Струи, следы и каверны, М., 1964. ³ И. И. Данилюк, В. Е. Кашкаха, Доп. АН УРСР, сер. А (1972). ⁴ Б. М. Левитан, ДАН, 146, № 1 (1962). ⁵ Г. Поляа, Г. Сегё, Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962. ⁶ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, М.—Л., 1945. ⁷ И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Вариационное исчисление, М., 1961. ⁸ К. Friedrichs, Math. Ann., 109, № 1, 60 (1933).