

А. В. АНИСИМОВ

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЯЗЫКА ДИКА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 15 XI 1972)

В работе исследуются некоторые алгоритмические проблемы, связанные с языком Дика.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$ — двойной алфавит, τ — естественный эпиморфизм свободной полугруппы $F(X)$ в алфавите X на свободную группу $\mathfrak{F}$, порожденную свободными образующими $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ядро этого гомоморфизма называют языком Дика и обозначают через D_{2n} .

Язык D_{2n} часто встречается в теоретических исследованиях по контекстно-свободным языкам.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Для произвольной контекстно-свободной грамматики G , задающей язык L ,*

- 1) *не существует алгоритма, проверяющего пустоту пересечения $D_{2n} \cap L$, $n \geq 2$;*
- 2) *не существует алгоритма, проверяющего включение $D_{2n} \subseteq L$, $n \geq 3$;*
- 3) *существует алгоритм, проверяющий включение $L \subseteq D_{2n}$;*
- 4) *существует алгоритм, решающий проблемы 1) и 2) при $n = 1$;*
- 5) *проблемы 1) и 2) могут иметь любую степень неразрешимости.*

Доказательство пп. 1) и 2) основывается на сведении проблемы тождества для конечно-определенных групп к алгоритмическим вопросам для контекстно-свободных языков ⁽¹⁾. Идея такого сведения заключается в том, что конечно-порожденную нормальную подгруппу свободной группы можно промоделировать при помощи подходящего контекстно-свободного языка.

Пусть L_1 — язык в алфавите Σ_1 , L_2 — язык в алфавите Σ_2 и $p \in L_1$. Обозначим через $p(L_1)$ язык, получающийся из p и L_2 следующим образом:

$q \in p(L_2)$ тогда и только тогда, когда существуют слова $u_1, u_2, \dots, u_{m+1}$ из свободной полугруппы $F(\Sigma_1)$ и слова $r_1, r_2, \dots, r_m$ из $F(\Sigma_2)$ такие, что $p = u_1 u_2 \dots u_{m+1}$, а $q = u_1 r_1 u_2 r_2 \dots u_m r_m u_{m+1}$.

Язык $L_1(L_2) = \bigcup_{p \in L_1} p(L_2)$ называем ϵ -подстановкой языка L_2 в язык L_1 .

Пусть $G = \langle X | w_1, \dots, w_k \rangle$ — конечно-определенная группа в алфавите X , заданная системой определяющих соотношений $w_1 = 1, w_2 = 1, \dots, w_k = 1, R = (\bigcup_k w_i) \cup (\bigcup_k w_i^{-1})$, C_f — класс слов в $F(X)$, эквивалентных слову f из $\mathfrak{F}$, т. е. $C_f = \tau^{-1}(f)$, $\# \notin X$.

В ⁽¹⁾ доказано: слово f равно единице в группе G тогда и только тогда, когда $C_f(\#) \cap D_{2n}(\# R^* \# \cup \{\epsilon\}) \neq \emptyset$. Символ $\#$ был необходим только для того, чтобы сохранить детерминированность соответствующих языков. Если не требовать детерминированности, то можно ограничиться результатом: слово f равно единице в группе G тогда и только тогда, когда $C_f \cap D_{2n}(R^*) \neq \emptyset$.

Используя операцию деления на слово $f \mid L = \{x \in F(X) \mid fx \in L\}$, из этого факта можно без труда получить $C_f \cap D_{2n}(R^*) \neq \emptyset$ тогда и только

В заключение отметим, что многие алгоритмические проблемы для свободных групп сводятся к рассмотрению алгоритмической природы языка Дика. Так, например, проблема существования решений уравнения $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ в свободной группе $\mathfrak{F}$ очевидным образом эквивалентна вопросу о непустоте пересечения $L_f \cap D_{2n}$, где L_f — нс-язык, получаемый из слова f подстановками вместо x_i всех слов из $F(X)$.

Результаты работы докладывались на семинаре по теории языков и процессоров в Киевском государственном университете; руководители его — акад. В. М. Глушков и проф. В. Н. Редько, которым автор выражает свою благодарность.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
9 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Анисимов, Кибернетика, 2 (1972). ² W. Boone, Ann. Math., 84, № 1 (1966). ³ М. К. Валиев, Алгебра и логика. Семинар, 8, № 1 (1969). ⁴ G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, J. London Math. Soc., 24 (1949). ⁵ С. Гинзбург, Математическая теория контекстно-свободных языков, М., 1970. ⁶ А. В. Анисимов, Кибернетика, № 4 (1971). ⁷ Sh. Greibach, J. ACM, 12 (1965). ⁸ А. В. Гладкий, Лекции по математической лингвистике, Новосибирск, 1966.