

УДК 551.465.7

ГЕОФИЗИКА

Р. Г. ГОРДЕЕВ, Б. А. КАГАН, В. Я. РИВКИНД

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПРИЛИВОВ В МИРОВОМ ОКЕАНЕ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 19 VI 1972)

За 140 лет, прошедших после опубликования первой котидальной карты Уэйвелла (¹), о приливах в Мировом океане накопилась богатая литература (²⁻¹⁶). Она вполне отразила тот интерес, который названная проблема стала вызывать, как только появилась минимальная возможность ее решения. Основная задача перечисленных работ заключалась в освещении картины приливов и построении мировых приливных карт. Для этого в одних работах (^{1, 8}) привлекались все имеющиеся данные наблюдений и элементарные представления о природе изучаемого явления, в других — сочетание теоретических соображений и данных наблюдений на островных и береговых пунктах измерений уровня (¹¹⁻¹³) или только на последних (¹⁵).

Если получение подробной картины приливов не является самоцелью и ставится задача объяснить механизм формирования приливных движений, то задание любой другой исходной информации, кроме внешних параметров, становится мало оправданным. В настоящей работе приливы в Мировом океане рассчитываются только по внешним параметрам, а именно по заданному распределению приливообразующих сил, известной топографии дна и конфигурации береговой линии. Такой путь использовался уже в работах (^{9, 10, 14, 16}), однако, в отличие от этих работ, здесь мы откажемся от ряда допущений при описании сил трения, привлечение которых приводит, в частности, к существенному завышению результирующей величины диссипации приливной энергии.

В основу данного исследования была положена модель приливных движений, разработанная в (¹⁸). Уравнения динамики приливов в этой модели записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A_1 \mathbf{w} = -\frac{gD}{a_0} \text{grad } \zeta - \frac{r}{D^2} |\mathbf{w}| \mathbf{w} + \frac{k_r}{a_0^2} \left(\Delta \mathbf{w} - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{w} + A_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \psi} \right) + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div } \mathbf{w} = 0, \quad (2)$$

где, помимо общеизвестных обозначений, $\mathbf{w}$ — вектор-функция с компонентами V_θ , V_ψ , которые имеют смысл составляющих полного потока в направлении осей θ и ψ (здесь θ — дополнение до широты, ψ — долгота), $D = D(\theta, \psi)$ — глубина,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2\omega \cos \theta \\ 2\omega \cos \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} & 0 \end{pmatrix},$$

ω — угловая скорость вращения Земли; свободный член $\mathbf{f}$ характеризует собой влияние приливообразующих сил, он связан с величиной статического прилива ζ^+ соотношением

$$\mathbf{f} = \frac{gD}{a_0} \text{grad } \zeta^+, \quad (3)$$

причем для средних астрономических условий, например для гармоники M_2 приливообразующих сил,

$$\zeta^+ = 0,2425 \sin^2 \theta \cos (\sigma t + 2\psi); \quad (4)$$

здесь σ — частота волны M_2 , ψ отсчитывается от меридиана Гринвича к востоку.

В принятой модели механизм диссипации приливной энергии описывается обычным способом. Поэтому коэффициенты придонного и горизонтального турбулентного трения (в (1) r и k_r соответственно) представляют собой числовые постоянные.

На береговой черте Γ ставится условие прилипания

$$\mathbf{w}|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Так же, как и в ^(9, 10, 16), никаких предположений относительно характера изменения $\mathbf{w}$, ζ во времени не делается. Вместо этого предполагается, что в начальный момент времени океан находится в состоянии покоя:

$$\mathbf{w}, \zeta|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Для задачи (1), (2), (5), (6) справедливы следующие два утверждения.

Теорема 1. Если Ω — произвольная область, лежащая в сферическом прямоугольнике $\{0 < \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi; 0 \leq \psi \leq 2\pi\}$, $f \in L_2(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times [0, T]$, то задача (1), (2), (5), (6) однозначно разрешима на любом конечном интервале времени $[0, T]$.

Теорема 2. Если Ω — область, указанная в теореме 1, вынуждающая сила f описывается соотношениями (3), (4) и $D(\theta, \psi) = D_0 = \text{const}$, то при малых значениях r существует периодическое решение задачи (1), (2), (5), (6).

Доказательство теоремы 1 проводится методом Галеркина. Предварительно выводятся априорные «энергетические» оценки точных решений, на основании которых затем доказывается однозначная разрешимость соответствующих галеркинских систем. Указанные оценки и теорема о слабой компактности ограниченных в гильбертовых пространствах множеств позволяет доказать существование слабого предела последовательности приближенных решений по Галеркину. Этот предел и является искомым решением нашей задачи.

При доказательстве теоремы 2 применяется метод малого параметра. Прежде всего устанавливается существование периодического решения системы (1), (2), (5), (6) в линейном приближении ($r = 0$). Затем учитывается тот факт, что нелинейный член в (1) удовлетворяет условию Липшица и поэтому периодическое решение непрерывно продолжается на случай малых значений r ⁽¹⁷⁾.

Система (1) — (6) решалась численно по схеме переменных направлений, аналогичной той, которая была предложена в ⁽¹⁸⁾. С помощью метода «энергетических» оценок ⁽¹⁹⁾ было показано, что используемая схема устойчива, если выполняются следующие условия:

$$\frac{2g \max_{\Omega_h} D}{(a_0 h \delta)^2} + \frac{M}{\delta^2} \sqrt{\frac{g}{\min_{\Omega_h} D}} + \frac{5M\tau^2 g}{a_0 h \delta^2} + \frac{2k_r \tau}{a_0^2 h \delta^2} + \frac{\omega \tau}{\delta} < 1; \\ \frac{2k_r \tau}{(a_0 h \delta)^2} < 1, \quad (7)$$

где $M = 1 / a_0 \max_{\Omega_h} |\text{grad } D|$; $\delta = \min(\sin \theta_0; \sin \theta_1)$, индексом h фиксируются функции, рассматриваемые в точках широтно-долготной сетки с угловым шагом h , τ — шаг по времени.

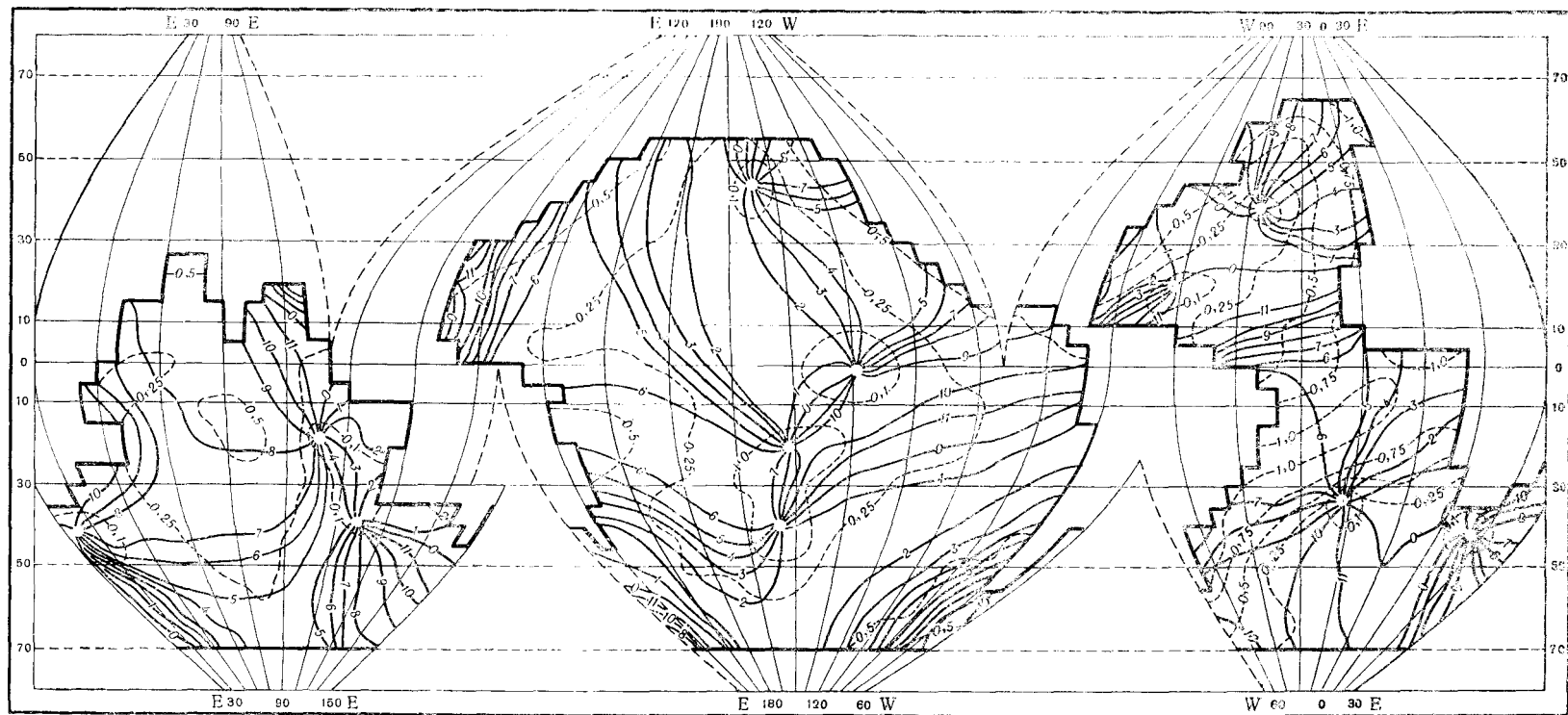


Рис. 1. Приливная карта Мирового океана. Волна M_2 . Сплошными линиями показано время наступления полной воды (в средних лунных часах) относительно кульминации Луны на меридиане Гринвича, пунктирными линиями — амплитуда прилива (в метрах)

Сходимость схемы была доказана на основе методики, разработанной в (20). В результате выяснилось, что эта схема сходится к гладкому решению системы (1) — (6) со скоростью $\sqrt{\tau} + h$ при соотношении шагов $\tau \sim h^2$.

В практических расчетах τ и h выбирались соответственно равными 6 мин. и 5° . Поле глубин было заимствовано из (14). Расчет, выполненный при $r = 3 \cdot 10^{-3}$ и $k_r = 10^7$ см²/сек*, продолжался до выхода решения на периодический режим. Критерием его установления служило условие совпадения с 1%-ной точностью средней по области кинетической энергии в два последующих приливных периода. В рассматриваемом случае, когда за исходное состояние принималось состояние покоя, приливные движения, соответствующие гармонике M_2 приливообразующих сил, приспособляются к изменению последних за 22 приливных периода.

Построенная по результатам вычислений карта изоамплитуд и котидальных линий (рис. 1) не противоречит современным представлениям о пространственной структуре приливов в Мировом океане. Она находится также в качественном согласии с котидальными картами, построенными в (6-8) по данным наблюдений. Это позволяет надеяться, что принятая здесь модель может быть использована для проверки существующих гипотез о механизме формирования приливных явлений в Мировом океане.

Ленинградское отделение
Института океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступило
18 V 1972

Вычислительный центр
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Whewell, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 147 (1833). ² G. B. Airy, Encyclopedia Metropolitana, 5, 241 (1842). ³ R. A. Harris, Manual of Tides, 4, Appl. 5, 313 (1904). ⁴ R. Sterneek, Sitzungber. d. Akad. Wiss. Wien, Abt. 2a, 129, 131 (1920). ⁵ R. Sterneek, ibid., 130, 363 (1921). ⁶ G. Dietrich, Veröffentl. Inst. Meeresk. Univ. Berlin, A41, 1 (1944). ⁷ C. Villain, Ann. Hydrogr. Paris, 3, 269 (1951). ⁸ G. Dietrich, Allgemeine Meereskunde, Berlin, 1957. ⁹ T. Ueno, Oceanogr. Mag., 15, 99 (1964). ¹⁰ T. Ueno, Oceanogr. Mag., 16, 47 (1964). ¹¹ К. Д. Ти-рон. Ю. Н. Сергеев, А. Н. Мичурин, Вестн. Ленингр. ун-в, сер. геол. и геогр., № 24, 123 (1967). ¹² К. Т. Богданов, В. А. Магарик, ДАН, 172, 1315 (1967). ¹³ К. Т. Богданов, В. А. Магарик, Физика атмосферы и океана, 5, 1309 (1969). ¹⁴ C. L. Pekeris, Y. Accad, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A265, 413 (1969). ¹⁵ M. Hendershott, W. Munk, Ann. Rev. Fluid Mech., 2, 205 (1970). ¹⁶ W. Zachel, Mitt. Inst. Meeresk. Univ. Hamburg, № 17, 1 (1970). ¹⁷ И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М.—Л., 1956. ¹⁸ Г. И. Марчук, Б. А. Каган, Р. Э. Тамсалу, Физика атмосферы и океана, 5, 694 (1969). ¹⁹ О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», 1970. ²⁰ О. А. Ладыженская, В. Я. Ривкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, 259 (1971).

* Этот коэффициент горизонтального турбулентного трения примерно на порядок меньше его величины, характеризующей интенсивность макротурбулентного обмена за счет движений с масштабом, меньшим горизонтального шага сетки. Тем самым мы преднамеренно ослабили эффект горизонтального турбулентного трения, чтобы приблизить исходные уравнения динамики приливов к их традиционной форме. Однако полностью исключить горизонтальное турбулентное трение, не нарушив при этом выполнения на береговой черте естественного условия прилипания, мы не можем.