

Г. А. ГУРЕВИЧ

О РАНГАХ БЕСКОЭФФИЦИЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ В СВОБОДНОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 31 V 1971)

Пусть F — свободная группа с образующими $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, F_x$ — свободная группа с образующими $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\mathfrak{U}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{U_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $i = 1, 2, \dots, t$, — множество слов из F_x . Через

$$\mathfrak{U}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \quad (1)$$

будем обозначать систему бескоэффициентных уравнений $U_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, $i = 1, 2, \dots, t$. Кортеж $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $A_i \in F$, называется решением ранга k системы уравнений (1), если $U_i(A_1, A_2, \dots, A_n) = 1$, $i = 1, 2, \dots, t$, и ранг подгруппы, порожденной словами $A_1, A_2, \dots, A_n$, равен k . Ранг системы уравнений определяется как максимальный ранг ее решений. Систему слов $T_k = \{P_1(x_i), P_2(x_i), \dots, P_k(x_i)\}$ из F_x будем называть примитивной, если ее можно дополнить до системы свободных образующих группы F_x . Можно доказать следующий неэффективный критерий того, что система уравнений (1) имеет решение ранга k .

Теорема 1. Система уравнений (1) имеет решение ранга k тогда и только тогда, когда существует примитивная система T_{n-k} такая, что $T_{n-k} \rightarrow \mathfrak{U}^*$.

В случае, когда $k = n - 1$ и множество $\mathfrak{U}$ состоит из одного слова, этот критерий доказывается в (1).

Следующая лемма является обобщением теоремы 5 из (1).

Лемма 1. Пусть $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\sigma_{x_l}(W) \neq 0$ при некотором l .

Тогда, если $T_k \rightarrow W$, то $T_k \rightarrow V$.

Используя теорему 1 и лемму 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если уравнения $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ и $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ имеют общее решение ранга $n - 1$ и $\sigma_{x_l}(V) \neq 0$ при некотором l , то всякое решение первого уравнения является решением второго.

Кортеж $\mathfrak{B}_k = \{B_i(y_1, y_2, \dots, y_k)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, будем называть полным кортежем, если слова $B_i(y_1, y_2, \dots, y_k)$ порождают свободную группу с образующими $y_1, y_2, \dots, y_k$. Если $\mathfrak{B}_k$ — полный кортеж, то множество всевозможных кортежей вида $\{B_i(A_1, A_2, \dots, A_k)\}$, где $A_j \in F$ и ранг кортежа $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ равен k , будем называть множеством значений кортежа $\mathfrak{B}_k$.

Теорема 3. Если множество решений ранга k системы уравнений (1) непусто, то его можно разбить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых есть множество значений некоторого полного кортежа.

С другой стороны, используя теорему 2 (2), по любому конечному множеству полных кортежей ранга k , $k > 1$, можно построить бескоэффициентное уравнение, множество решений ранга k которого есть объединение множеств значений этих кортежей.

* Запись $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{M}$ означает, что каждое слово из множества слов $\mathfrak{M}$ принадлежит нормальному замыканию слов из $\mathfrak{X}$.

Теорема 3 оказывается полезной при исследовании ранга некоторых типов бескоэффициентных уравнений. Так, опираясь на теорему 3 и результат (3), можно доказать следующую теорему о ранге уравнений вида

$$W(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m) = 1, \quad m > 1. \quad (2)$$

Теорема 4. Если для слова $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ все числа $\sigma_{x_i}(W) / d$ при $i = 1, 2, \dots, 2k$ ($k < [(n+1)/2]$, d — наибольший общий делитель чисел $\sigma_{x_i}(W)$) взаимно просты с некоторым числом вида $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ ($p_i \neq 1$), делящим m , и $\sigma_{x_{2k+1}}(W) \neq 0$, то ранг уравнения (2) меньше $n - k$.

При $k = 1$ теорема 4 принимает следующий вид.

Теорема 5. Если для слова $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ числа $\sigma_{x_1}(W)$, $\sigma_{x_2}(W)$ не делят d_W и $\sigma_{x_3}(W) \neq 0$, то ранг уравнения (2) меньше $n - 1$.

Приведем идею доказательства теоремы 5. Теорема 4 доказывалась по аналогичной схеме, но несколько более сложно.

Кортеж $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ назовем регулярным, если его ранг равен рангу кортежа $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, где при $i = 1, 2, \dots, n$ слова B_i просты и A_i есть некоторая степень B_i . Из теоремы 3 можно вывести, что если произвольное уравнение имеет решение ранга t , то оно имеет и регулярное решение ранга t . Допустим, что уравнение (2) имеет ранг $n - 1$. Тогда уравнение

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \quad (3)$$

также имеет ранг $n - 1$. Пусть $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ есть регулярное решение ранга $n - 1$ уравнения (2). Тогда $\{A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m\}$ — регулярное решение ранга $n - 1$ уравнения (3). По теореме 3 найдется полный кортеж $\mathfrak{B}_{n-1} = \{B_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, такой, что всякое его значение есть решение ранга $n - 1$ уравнения (3) и $B_i(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) \equiv A_i^m$ на некотором кортеже $\{C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\}$ ранга $n - 1$, $C_i \in F$. Тогда в силу (3) каждое слово $B_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ есть либо m -я степень, либо степень примитивного элемента. Так как кортеж $\mathfrak{B}_{n-1}$ полный, то только один его элемент может быть m -й степенью. Можно доказать, что существует автоморфизм свободной группы F_y с образующими $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, который переводит кортеж $\mathfrak{B}_{n-1}$, с точностью до перестановки, либо в кортеж

$$\{y_1, Z_2 y_2 Z_2^{-1}, Z_3 y_3 Z_3^{-1}, \dots, Z_{n-2} y_{n-2} Z_{n-2}^{-1}, Z_{n-1} y_{n-1}^{\eta_1} Z_{n-1}^{-1}, Z_n^m\}, \quad (4)$$

либо в кортеж

$$\{y_1, Z_2 y_2 Z_2^{-1}, Z_3 y_3 Z_3^{-1}, \dots, Z_{n-2} y_{n-2} Z_{n-2}^{-1} Z_{n-1} y_{n-1}^{\eta_1} Z_{n-1}^{-1}, Z_n y_n^{\eta_2} Z_n^{-1}\}, \quad (5)$$

где Z_i — слова из F_y . Доказательство этого факта основывается на следующих трех леммах.

Лемма 2. Если слово $P(a_i^{s_i}, b_i)$, $s_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, t$, примитивно, то слово $P(a_i, b_i)$ примитивно и найдутся такие слова $A_1, A_2, \dots, A_t$, что $\{A_1 a_1 A_1^{-1}, A_2 a_2 A_2^{-1}, \dots, A_t a_t A_t^{-1}, P(a_i, b_i)\}$ примитивная система.

Лемма 3. Если φ — автоморфизм группы F_y , то множества значений кортежей $\mathfrak{B}_{n-1}$ и $\{\varphi B_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})\}$ совпадают.

Лемма 4. Если кортеж $\{Z_1 y_1^{\eta_1} Z_1^{-1}, Z_2 y_2^{\eta_2} Z_2^{-1}, \dots, Z_{n-1} y_{n-1}^{\eta_{n-1}} Z_{n-1}^{-1}, Z_n^m\}$, где Z_i — слова из F_y , полный, то все η_i быть может, кроме одного, равны ± 1 .

Можно проверить, что значения кортежей (4) и (5) при $y_i = a_i$ не являются решением уравнения (3), но в силу леммы 3 одно из этих значений должно быть решением уравнения (3). Таким образом, предположив, что ранг уравнения (2) равен $n - 1$, мы получили противоречие.

Известно, что ранг уравнения $x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = y^k$, $k > 1$ равен 1 (см., например, (4)). Следующая теорема является обобщением этого результата.

Теорема 6. Пусть $W(x_i, y_j) = (x_1, x_2, \dots, x_n)M(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k)$,

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный коммутатор букв $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\sigma_{y_l}(M) \neq 0$ при некотором l . Тогда, если слово $U(x_i, y_j)$ не примитивно, то ранг уравнения $W(x_i, y_j) = 1$ не превосходит $n + k - 2$.

Слово V назовем неприводимым словом, если из $P \rightarrow V$ следует, что $P \sim V^{\pm 1}$. Для доказательства теоремы 6 достаточно показать, что слово $W(x_i, y_j)$ неприводимо, а затем воспользоваться теоремой 1. Неприводимость слова $W(x_i, y_j)$ доказывается с помощью следующих четырех лемм.

Лемма 5. Если φ — произвольный автоморфизм группы F_x , то слово $V \in F_x$ неприводимо тогда и только тогда, когда слово φV неприводимо.

Следующие две леммы выводятся из теоремы Магнуса «о свободе».

Лемма 6. Любой примитивный элемент неприводим.

Следствие. Если слово $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ примитивно и $P(1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv 1$, то слово $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сопряжено либо с буквой x_1 , либо с x_1^{-1} .

Отметим, что из этого факта непосредственно выводится теорема Чанга о внутренних автоморфизмах свободной группы с двумя образующими⁽⁵⁾.

Лемма 7. Если

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, z, y_1, y_2, \dots, y_k) \rightarrow \\ \rightarrow Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z)Q_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$\sigma_z(V) = 0$ и буква y_1 существенно входит в V , то $[z^i V z^i]_z^* \rightarrow [Q_1, Q_2]_z^*$ при некотором целом l , где через $[T]_z^*$ обозначена запись слова T ($\sigma_z(T) = 0$) в образующих $z^i x^i z^{-i}, z^j y^j z^{-j}$ нормальной подгруппы, порожденной буквами $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k$ в группе с образующими $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k, z$.

Лемма 8. Пусть буквы z и s не принадлежат алфавиту

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k. \quad (6)$$

Тогда слово $W(x_i, y_j)$ можно перевести в слово

$$sM(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k)$$

последовательностью преобразований, каждое из которых есть либо преобразование вида $V \Rightarrow [V]_z^*$, либо свободный автоморфизм, тождественный на буквах из алфавита (6).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. Steinberg, Mich. Math., 18, № 1 (1971). ² Г. А. Гуревич, Всесоюз. алгебраический коллоквиум (резюме сообщений), Гомель, 1969. ³ G. Baumslag, Algebra, 2, № 3 (1965). ⁴ G. Baumslag, Acta math., 104, 217 (1960). ⁵ B. Chang, Mich. Math., 7, № 1 (1960).