

С. И. ЗУХОВИЦКИЙ, Р. А. ПОЛЯК, М. Е. ПРИМАК

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 6 VI 1972)

Многие задачи математического программирования, теории игр и математической экономики являются задачами отыскания состояния равновесия.

В предлагаемой работе приводится весьма общая равновесно-экстремальная задача, охватывающая как частные случаи различные модели математической экономики, а также строится специальный метод отыскания равновесия в одной модели производства, обобщающей классическую модель А. Вальда.

1. Пусть в евклидовом пространстве E^n задано выпуклое замкнутое и ограниченное множество Ω и точечно-множественное отображение A , ставящее в соответствие каждой точке $x \in \Omega$ множество $A(x) \subset \Omega$, и пусть на $\Omega \times \Omega$ определена функция $\Phi(x, y)$. Поставим задачу отыскания точки $x^* \in \Omega$, для которой

$$\max \{ \Phi(x^*, y) \mid y \in A(x^*) \} = \Phi(x^*, x^*). \quad (1)$$

Для существования точки $x^* \in \Omega$, удовлетворяющей (1), достаточно, чтобы для каждой точки $x \in \Omega$ множество $A(x) \neq \emptyset$ было выпукло и замкнуто, отображение A было полунепрерывно снизу, а функция $\Phi(x, y)$ была непрерывна по совокупности аргументов и вогнута по y при каждом фиксированном $x \in \Omega$.

Как нетрудно убедиться, задачей типа (1) является сформулированная в (1) модель абстрактной социальной системы, рассмотренная в (2) общая равновесно-экстремальная задача, проблема отыскания состояния равновесия по Нэшу (3) вогнутой игры многих лиц, модель Эрроу — Дебре, а также ряд других моделей математической экономики.

2. Остановимся на некоторых подходах к решению общей задачи (1) и некоторых ее частных случаев.

Рассмотрим функцию $F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x, x)$ и пусть

$$\max \{ F(x, y) \mid y \in A(x) \} = F(x, \theta(x)), \quad \theta(x) \in A(x).$$

Если выполнены условия: 1) функция $F(x, y)$ выпукла по x при любом $y \in \Omega$; 2) $F(x, \theta(x)) \geq F(x, \theta(z)) \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \Omega$, то функция $\varphi(x) = F(x, \theta(x))$ выпукла. Если, кроме того, множество $\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid x \in A(x)\}$ выпукло, то решением задачи (1) является любое решение следующей задачи выпуклого программирования:

$$\min \{ \varphi(x) \mid x \in \Omega_0 \} = 0. \quad (2)$$

Для отыскания этого решения может быть использован следующий процесс:

$$x^0 \in \Omega_0, \quad x^{k+1} = P_{\Omega_0}(x^k - t_k \nabla_x F(x, \theta(x^k)) \mid_{x=x^k}),$$

где t_k выбирается из обычных условий

$$\sum_k t_k = \infty, \quad t_k \rightarrow 0, \quad t_k \geq 0, \quad (*)$$

а $P_{\Omega_0}(\cdot)$ — оператор проектирования на множество Ω_0 .

Сходимость последовательности $\{x^k\}$ к x^* следует из теоремы 1 работы (4).

Если выполнены условия: 1) функция $F(x, y)$ вогнута на $\Omega \times \Omega$ по совокупности переменных; 2) отображение A вогнуто, т. е.

$$\alpha A(x_1) + (1 - \alpha)A(x_2) \subset A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

то функция $\varphi(x)$ вогнута, а множество Ω_0 выпукло. Решением задачи (1) в этом случае является каждая точка, реализующая минимум $\varphi(x)$ на Ω_0 .

3. Перейдем теперь к рассмотрению изученной в (2) общей равновесно-экстремальной задачи как частного случая задачи (1).

Пусть на $\Omega \times \Omega$ заданы функции $\Phi(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$, ..., $\Phi_m(x, y)$, непрерывные по совокупности переменных и вогнутые по y . Введем отображение

$$A(x) = \{y \in \Omega \mid \Phi_j(x, y) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Тогда равновесно-экстремальная задача (2), т. е. задача отыскания $x^* \in \Omega$, для которой $\Phi_j(x^*, x^*) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, и

$$\max \{\Phi(x^*, y) \mid y \in \Omega, \quad \Phi_j(x^*, y) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m\} = \Phi(x^*, x^*), \quad (3)$$

сведется, очевидно, к задаче (1).

Заметим далее, что если $A(x) = \Omega$ для $\forall x \in \Omega$, то задача (1) сводится к задаче отыскания точки $x^* \in \Omega$ такой, что

$$\max \{\Phi(x^*, y) \mid y \in \Omega\} = \Phi(x^*, x^*), \quad (4)$$

т. е. к задаче, для решения которой в (5) и (6) построено несколько вычислительных методов.

Связь между задачами (3) и задачей типа (4) устанавливает следующее

Утверждение (2). Если точка $\tilde{x}$ является решением задачи типа (4) для функции

$$\Phi_0(x, y) = \min \{\Phi(x, y) - \Phi(x, x), \Phi_1(x, y), \dots, \Phi_m(x, y)\} \quad (5)$$

и если существует точка $\bar{y} \in \Omega$, для которой

$$\Phi_j(\tilde{x}, \bar{y}) > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6)$$

то $\tilde{x}$ является также решением задачи (3).

Однако воспользоваться методами (5, 6) для решения задачи (3) путем решения задачи (4) с функцией (5), вообще говоря, нельзя, так как функция (5) не удовлетворяет свойствам, необходимым для применимости указанных методов. Ниже формулируются дополнительные условия, при выполнении которых можно использовать методы (5, 6) для решения задачи (3).

Пусть

1) функции $\Phi_j(x, x)$, $j = 1, \dots, m$, вогнуты на Ω ;

2) $\exists \bar{x} \in \Omega$, $\Phi_j(\bar{x}, \bar{x}) > 0$, $j = 1, \dots, m$;

3) существуют определенные на Ω положительные функции $\sigma_j(x)$, такие, что

$$g_j(x) = \nabla_y \Phi_j(x, y) \big|_{y=x} = \sigma_j(x) \nabla_x \Phi_j(x, x), \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда при выполнении этих условий каждая точка равновесия задачи типа (4) с функцией $\Phi(x, y)$, рассматриваемой на множестве $\widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega \mid \Phi_j(x, x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m\}$, является также точкой равновесия задачи (3).

4. Остановимся еще на несколько другом возможном подходе к решению задачи (3). Будем в дальнейшем считать, что функции $\Phi(x, y)$, $\Phi_j(x, y)$, $j = 1, \dots, m$, выпуклы по y и поставим задачу отыскания точки $x^* \in \Omega$, для которой

$$\min \{\Phi(x^*, y) \mid y \in \Omega, \quad \Phi_j(x^*, y) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m\} = \Phi(x^*, x^*). \quad (3')$$

Поскольку при фиксированном x^* задача (3') превращается в задачу выпуклого программирования с функцией Лагранжа $L(x^*, y, u) = \Phi(x^*, y) + \sum_j u_j \Phi_j(x^*, y)$, то для $g(x^*, u^*) = \nabla_y L(x^*, y, u^*)|_{y=x^*}$, по теореме Куна — Таккера, имеем

$$\min \{(g(x^*, u^*), y - x^*) | y \in \Omega\} = 0. \quad (7)$$

Приведем основанный на критерии (7) вычислительный метод для решения задачи (3).

Пусть $\Phi_0(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x, x)$. Будем в дальнейшем считать, что все функции $\Phi_j(x, y)$, $j = 0, 1, \dots, m$, неотрицательны на $\Omega \times \Omega$. Введем функции

$$f_k(x, y) = \left(\sum_{j=0}^m \Phi_j^k(x, y) \right)^{1/k}; \quad g_k(x) = \nabla_y f_k(x, y)|_{y=x};$$

$$F_k(x) = \min \{(g_k(x), y - x) | y \in \Omega\} = (g_k(x), \theta_k(x) - x) = (g_k(x), \xi_k(x)).$$

В качестве исходного приближения выберем $x^0 \in \Omega$. Пусть уже построены приближения $x^1, \dots, x^k$. Новое $(k+1)$ -е приближение вычисляем по формуле

$$x^{k+1} = x^k + t_k \xi_k(x^k). \quad (8)$$

Имеет место

Теорема. Пусть выполнены условия:

- 1) Ω — строго выпуклый компакт;
- 2) для матрицы Якоби $H_j(x)$ вектор-функции $G_j(x) = \nabla_y \Phi_j(x, y)|_{y=x}$, $j = 0, 1, \dots, m$, существует $\mu_j > 0$ такое, что выполнены неравенства

$$(H_j(x)\xi, \xi) \geq \mu_j(\xi, \xi) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in E^n;$$

- 3) существует положительная на Ω функция $\sigma(x)$ такая, что

$$G_j(x) = \sigma(x) \nabla_x \Phi_j(x, x), \quad j = 0, 1, \dots, m;$$

тогда существует положительная константа C такая, что при

$$t_k = \min \{1, C / (k \|\xi_k(x^k)\|^2)\}$$

последовательность $\{x^k\}$ содержит сходящуюся к x^* подпоследовательность, которую удается выделить из $\{x^k\}$.

В случае $\sigma(x) = 1$ задача (3) эквивалентна задаче выпуклого программирования, а процесс (8) близок методу (7) решения задачи выпуклого программирования.

5. В заключение рассмотрим одну задачу типа (3), являющуюся обобщением классической модели А. Вальда.

Пусть в экономической системе производится n продуктов и используется r видов ресурсов. Величина a_{ij} , $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, n$, указывает затраты i -го вида ресурса, необходимые для производства одной единицы j -го продукта.

Пусть функция $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$, задает цену единицы j -го продукта при условии, что продукты произведены в количествах $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$; функция $a_i(v) = a_i(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)$ указывает объем ресурсов i -го вида при условии, что цены ресурсов соответственно равны $v_1, \dots, v_i, \dots, v_r$. Пусть далее $A = (a_{ij})$;

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)); \quad a(v) = (a_1(v), \dots, a_r(v)).$$

Вектор $(x^*; v^*)$ будем называть решением рассматриваемой модели производства, если выполнены условия:

- 1) $Ax^* \leq a(v^*)$; $x^* \geq 0$; $\max \{(f(x^*), x) | Ax \leq a(v^*), x \geq 0\} = (f(x^*), x^*)$;
- 2) $A^T v^* \geq f(x^*)$; $v^* \geq 0$; $\min \{(a(v^*), v) | A^T v \geq f(x^*), v \geq 0\} = (a(v^*), v^*)$.

Для решения приведенной задачи используем двойственный метод Х. Удзавы^(*), который, как оказалось, сходится при естественных предположениях, не столь обременительных, как сформулированные в предыдущих пунктах. Отметим, что возможность использования этого метода для решения классической модели А. Вальда была указана Б. Г. Питтелем.

Для упрощения изложения включим ограничения $x \geq 0$ в число ограничений общего вида. Для этого введем обозначения

$$w = (v_1, \dots, v_r; u_1, \dots, u_n); \quad \tilde{a}(w) = (a_1(v), \dots, a_r(v); \overbrace{0, \dots, 0}^n); \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях задача заключается в отыскании вектора $(\hat{x}, \hat{w})$, для которого

$$\max \{(f(\hat{x}), x) \mid \tilde{A}x \leq \tilde{a}(w)\} = (f(\hat{x}), \hat{x});$$

$$\min \{(\tilde{a}(\hat{w}), w) \mid \tilde{A}^T w = f(\hat{x}), w \geq 0\} = (\tilde{a}(\hat{w}), \hat{w}).$$

В качестве исходного приближения выбираем $w^0 \geq 0$ и из системы $f(x) = \tilde{A}^T w^0$ находим x^0 . Пусть уже проделано k шагов алгоритма и найдены приближения $w^0, x^0, \dots, x^{k-1}, w^k$. В качестве x^k берем решение системы

$$f(x) = \tilde{A}^T w^k.$$

Затем полагаем

$$\bar{w}^{k+1} = w^k + t_k(\tilde{A}x^k - \tilde{a}(w^k)),$$

причем величину шага t_k выбираем из условий (*), и

$$w^{k+1} = \begin{cases} \max\{0, \bar{w}^{k+1}\}, & \text{если } \|\max\{0, \bar{w}^{k+1}\}\| \leq R, \\ \frac{R \max\{0, \bar{w}^{k+1}\}}{\|\max\{0, \bar{w}^{k+1}\}\|}, & \text{если } \|\max\{0, \bar{w}^{k+1}\}\| > R, \end{cases}$$

где R удовлетворяет условию $R \geq \|w\|$.

Сходимость описанного процесса трактует

Теорема. Если выполнены условия:

1) непрерывная вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет условию сильного убывания

$$(f(x_1) - f(x_2), x_2 - x_1) \geq \gamma \|x_1 - x_2\|^2;$$

2) ограниченная вектор-функция $a(v)$ удовлетворяет условию Липшица и условию возрастания

$$(a(v_1) - a(v_2), v_1 - v_2) \geq 0;$$

3) матрица A не содержит нулевых строк и столбцов, то последовательность $\{x^k\}$ содержит сходящуюся к x^* подпоследовательность.

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
24 IV 1972

Украинский филиал Научно-исследовательского
института планирования и нормативов

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. Debreu, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1952). ² М. Е. Прима, ДАН, 200, № 3 (1971). ³ Д. Нэш, Сборн. Матричные игры, М., 1961. ⁴ Б. Т. Поляк, ДАН, 174, № 1 (1967). ⁵ С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Прима, Экономика и математич. методы, 7, № 6 (1967). ⁶ В. А. Волконский, С. А. Иванков, Сибирск. матем. журн., 11, № 4 (1970). ⁷ Р. А. Поляк, ДАН, 200, № 3 (1971). ⁸ Х. Удзава, Сборн. Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962.