

С. Е. КАРАПЕТЯН

ТОПОЛОГИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ЗАМКНУТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 II 1972)

Здесь излагается полная классификация асимптотических линий на замкнутых линейных поверхностях f трехмерного проективного пространства P_3 . Эта задача тесно связана с теорией проективных преобразований на прямой и с топологией поверхности f . Главная роль принадлежит теореме 1, которая доказывается элементарными средствами проективной геометрии.

1. Из дифференциальной геометрии известна следующая теорема: пусть имеем линейчатую (не обязательно замкнутую) поверхность f и четыре криволинейные асимптотические линии $\alpha^i \subset f$. Тогда если f не развевывается, то сложное отношение четырех точек $A^i = \alpha^i \cap l$ не зависит от положения образующей (прямой) l на линейчатой поверхности (см. (1), стр. 158). Если теперь взять две произвольные образующие прямые l и m , то в силу этой теоремы на этих прямых возникает соответствие $\lambda: x \mapsto y$, где $x \in l$, $y = \alpha \cap m$, α — произвольная асимптотическая линия $\subset f$ и λ сохраняет сложное отношение. Следовательно, в силу известной (из элементарной проективной геометрии) теоремы, λ есть проективное соответствие.

Таким образом, с каждой поверхностью f автоматически связывается некоторое проективное соответствие λ , которое называется внутренним соответствием.

Теперь предположим, что поверхность f замыкается, т. е. образующая прямая l после некоторого движения возвращается в исходное положение (подобно однополостному гиперболоиду). Тогда уже на каждой прямой l возникает проективное преобразование, индуцированное соответствием λ . Это преобразование мы обозначаем той же буквой λ и называем внутренним проективным преобразованием поверхности f . Заметим, что на однополостном гиперболоиде λ есть тождество.

2. Из проективной геометрии известно, что на действительной проективной прямой возникают пять классов проективных преобразований (см., например, (2)):

I	II	III	IV	V
Тождество	Эллиптическое	Параболическое	Гиперболическое прямого типа	Гиперболическое обратного типа
∞	0	1	2	2

где 0, 1, 2, ∞ есть число двойных точек преобразования. Важно то, что преобразования классов I — IV являются преобразованиями прямого типа и только V класс принадлежит обратному типу.

Ниоткуда не видно, что внутренние преобразования различных замкнутых поверхностей f исчерпывают все классы проективных преобразований. Поэтому доказывается

Т е о р е м а 1. Пусть имеем прямую l и произвольное проективное преобразование λ на этой прямой.

Тогда с большим произволом можно построить замкнутую линейчатую поверхность f , которая проходит через l и внутреннее преобразование которой совпадает с преобразованием λ .

3. Замкнутая поверхность f может иметь такие точки, окрестности которых негомеоморфны кругу. В этом пункте мы исключаем из рассмотрения такие поверхности и, следовательно, будем полагать, что f является двумерным многообразием (конечно, дифференцируемым). Доказывается

Т е о р е м а 2. *Если замкнутая линейчатая поверхность f является многообразием, то она гомеоморфна либо тору, либо бутылке Клейна. Причем f гомеоморфна тору тогда и только тогда, когда ее внутреннее проективное преобразование λ является преобразованием прямого типа.*

Наоборот, f гомеоморфна бутылке Клейна тогда и только тогда, когда λ является преобразованием обратного типа.

Справедливость первого утверждения теоремы следует из того, что поверхность f на себя допускает непрерывное векторное поле (даже два таких поля). Для этого необходимо и достаточно обращение в нуль эйлеровой характеристики. Но последнее требование справедливо только для тора и бутылки Клейна (см., например, ⁽⁴⁾).

Справедливость второго утверждения теоремы следует из следующего рассуждения. Пусть преобразование λ принадлежит обратному типу. Тогда λ имеет две неподвижные точки A и B на любой образующей прямой l поверхности f . Когда прямая l обегает всю поверхность f и возвращается в исходное положение, точки A и B описывают две замкнутые асимптотические линии α и β . Но поскольку λ имеет обратный тип, то x и λx , где $x \in l$, разделяют пару AB . А последнее означает, что точка x после полного оборота из одной стороны линии α (или β) переходит в другую сторону; т. е. α и β являются «однобережными» линиями. Но такие линии характерны только для неориентируемых поверхностей, а в данном случае только для бутылки Клейна. Точно так же можно убедиться, что на поверхностях f , гомеоморфных бутылке Клейна, внутреннее преобразование не может быть прямого типа. Все эти утверждения становятся очевидными на квадратных моделях тора и бутылки Клейна. В этих рассуждениях надо учесть, что две криволинейные асимптотические линии нигде не пересекаются и каждая из них однократно или неоднократно пересекает все прямолинейные образующие поверхности f . Здесь уже видно, что поведение асимптотических линий на f «в целом» находится в полной зависимости от проективного преобразования λ . Эта зависимость в полной мере раскрывается в п. 4.

4. Для упрощения примем следующую терминологию. Если асимптотическая линия α r раз обегает всю поверхность f (т. е. каждую прямолинейную образующую она пересекает r раз) и после чего замыкается, то она называется r -циклом. Мы скоро увидим, что если одна асимптотическая является r -циклом ($r > 1$), то все асимптотические являются r -циклами. При этом 1-циклы составляют исключение. Но они обладают другими свойствами, которыми уже не обладают r -циклы: 1-цикл называется **предельным циклом**, если все незамкнутые асимптотические линии стремятся к нему, делая вокруг него бесконечное число поворотов. Этот термин заимствован из теории дифференциальных уравнений (см., например, ⁽⁵⁾). Поскольку асимптотические линии на линейчатых поверхностях f определяются дифференциальным уравнением Рикати (см. ⁽¹⁾, стр. 157), то 1-циклы являются предельными циклами для этого уравнения, рассмотренного на торе или на бутылке Клейна. Поведение интегральных (а в нашем случае асимптотических) линий «в целом» называется также топологией интегральных линий данного дифференциального уравнения.

Все теоремы этого пункта описывают топологию асимптотических линий на замкнутых линейчатых поверхностях f .

Из элементарной проективной геометрии известно, что если на прямой существует одна точка x , для которой $\lambda^r x = x$, где $r > 1$, то аналогичное соотношение верно для любой точки этой прямой. Такое преобразование называется r -циклическим. Существуют только два класса проективных преобразований, которые содержат r -циклические преобразования. Это эл

липтический класс (r может быть любым натуральным числом, $r > 1$) и класс обратного типа ($r = 2$). Известно также, что если λ оставляет три точки неподвижными, то $\lambda = 1$.

В топологии асимптотических линий этим результатам соответствуют следующие утверждения.

Теорема 3. *Если одна из асимптотических линий является r -циклом ($r > 1$), то все асимптотические линии являются r -циклами. Из этого следует, что только 1-циклы могут быть предельными циклами. Если $r > 2$, то поверхность f обязательно ориентирована. Если $r = 2$, то поверхность f может быть как ориентированной, так и неориентированной.*

Теорема 4. *Если три асимптотические линии являются 1-циклами, то все асимптотические являются 1-циклами (например, однополостный гиперболоид). Если существует не больше двух асимптотических 1-циклов и λ нециклично, то они одновременно являются предельными циклами.*

Из элементарной проективной геометрии известно, что при эллиптическом нециклическом преобразовании последовательность точек $\dots, \lambda^{-r}x, \dots, \lambda^{-1}x, x, \lambda x, \dots, \lambda^r x, \dots$ всюду плотно покрывает прямую (x — произвольная точка прямой). В топологии этому результату соответствует

Теорема 5. *Если внутреннее проективное преобразование поверхности f принадлежит эллиптическому нециклическому типу, то f обязательно ориентируема и каждая асимптотическая линия всюду плотно покрывает поверхность f . Последнее означает, что если взять произвольную точку $M \in f$, то в любой окрестности этой точки существуют точки, принадлежащие данной асимптотической линии.*

Из элементарной проективной геометрии известно, что параболическое преобразование λ не может быть циклическим. Если A является (единственной) неподвижной точкой этого преобразования, то последовательность точек $\dots, \lambda^{-r}x, \dots, \lambda^{-1}x, x, \lambda x, \dots, \lambda^r x, \dots$ на прямой с обеих сторон приближается к точке A (т. е. A является предельной точкой для этой последовательности). В топологии этому факту отвечает

Теорема 6. *Если внутреннее проективное преобразование поверхности f параболическое, то f ориентируема. Существует единственная асимптотическая линия, которая является и 1-циклом и предельным циклом. Остальные асимптотические линии являются открытыми линиями, которые своими двумя концами стремятся к предельному циклу.*

Из проективной геометрии известно, что гиперболическое преобразование прямого типа на прямой не может быть циклическим. Оно имеет две неподвижные точки A и B . Все точки каждой последовательности $\dots, \lambda^{-r}x, \dots, \lambda^{-1}x, x, \lambda x, \dots, \lambda^r x, \dots$ принадлежат отрезку AxV . Точки A и B являются предельными точками этой последовательности. Этому факту в топологии отвечает

Теорема 7. *Если внутреннее проективное преобразование поверхности f гиперболическое и принадлежит прямому типу, то f ориентируема. Существуют две асимптотические линии, которые одновременно являются и 1-циклами, и предельными циклами. Остальные асимптотические линии являются открытыми линиями, которые одним своим концом стремятся к одному предельному циклу, другим концом — к другому.*

Из элементарной проективной геометрии известно, что гиперболическое преобразование λ обратного типа на прямой может быть либо нециклическим, либо только 2-циклическим (или, что то же самое, инволюционным). Оно всегда имеет две неподвижные точки A и B . Если существует одна точка x , для которой $\lambda^2 x = x$, то λ — 2-циклично. Всегда две точки x и λx разделяют точки A и B . Если λ не 2-циклично, то последовательность точек $\dots, \lambda^{-r}x, \dots, \lambda^{-1}x, x, \lambda x, \dots, \lambda^r x, \dots$ стремится к двум предельным точкам A и B . Этим результатам в топологии отвечает

Теорема 8. *Если внутреннее проективное преобразование λ поверхности f гиперболическое и принадлежит обратному типу, то f неориентируема. Существуют две асимптотические линии, каждая из которых однооре-*

менно является и 1-циклом, и предельным циклом. Если λ не 2-циклично, то каждая другая асимптотическая линия открыта. Она своим одним концом стремится к одному предельному циклу, другим концом — к другому. Когда λ 2-циклично (другая цикличность исключена), то 1-циклы уже не являются предельными циклами. Если существует одна асимптотическая линия, которая является 2-циклом, то все асимптотические (кроме двух 1-циклов) являются 2-циклами.

5. Можно формулировать несколько десятков таких теорем. Здесь мы хотим подчеркнуть то обстоятельство, что каждая теорема элементарной проективной геометрии находит свое отражение в топологии асимптотических линий и топологии самой поверхности f .

Эта работа стала темой моего доклада на семинаре Института математики Академии наук АрмССР.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, М., 1957. ² Кокстер, Действительная проективная плоскость, М., 1959. ³ П. С. Александров, Лекции по аналитической геометрии, «Наука», 1968. ⁴ Зейферт, Трейлфаль, Топология, М.—Л., 1939. ⁵ Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1970.