

А. А. Гришечкина
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ p -СОСТОЯНИЙ, СВОДЯЩИЕСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ

Для описания связанных состояний системы двух скалярных частиц массы m в импульсном представлении используются парциальные релятивистские уравнения квазипотенциального типа, которые в системе центра масс имеют вид [1]:

$$\psi_l(\chi_q, \chi_p) = \frac{m}{(2\pi)^3} G_0(E_q, E_p) \int_0^\infty V_l(E_q; \chi_p, \chi_k) \psi_l(\chi_q, \chi_k) d\chi_k, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

где χ_p и χ_k – быстроты, соответствующие начальному и конечному относительным импульсам частиц согласно формулам $|\mathbf{p}| = p = m \operatorname{sh} \chi_p$ и $|\mathbf{k}| = k = m \operatorname{sh} \chi_k$;

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2};$$

$2E_q$ – энергия двухчастичной системы;

$G_0(E_q, E_p)$ – свободная функция Грина;

$V_l(E_q; \chi_p, \chi_k)$ – парциальный потенциал, который связан с трёхмерным соотношением $(\mathbf{p}\mathbf{k}/pk = \cos \theta_{pk})$:

$$V_l(E_q; \chi_p, \chi_k) = 2\pi p k \int_{-1}^1 V(E_q, \mathbf{p}, \mathbf{k}) P_l(\cos \theta_{pk}) d \cos \theta_{pk}. \quad (2)$$

Свободная функция Грина, которая используется при формулировке уравнений Логанова-Тавхелидзе и Кадышевского, соответственно, имеет вид:

$$G_0^{(LT)}(E_q, E_p) = (E_q^2 - E_p^2 + i0)^{-1}; \quad (3)$$

$$G_0^{(K)}(E_q, E_p) = (2E_p(E_q - E_p + i0))^{-1}.$$

Рассмотрим потенциал, зависящий от трёхмерных импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ следующим образом:

$$V(E_q, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{\lambda}{\sqrt{m\Delta^0 - m^2}}, \quad (4)$$

где λ – константа связи;

$$\Delta^0 = (-\mathbf{p}\mathbf{k} + E_p E_k) / m.$$

Интегральное уравнение (1) с этим потенциалом в сферически-симметричном случае, то есть для s -состояний, может быть сведено к дифференциальному. Покажем, что аналогичное сведение уравнения к дифференциальному возможно и для p -состояний.

Подстановка потенциала (4) в формулу (2) и последующее вычисление при $l = 1$ приводит к парциальному потенциалу вида:

$$V_1(\chi_p, \chi_k) = A \begin{cases} u(\chi_p)v(\chi_k), & \chi_p > \chi_k; \\ u(\chi_k)v(\chi_p), & \chi_p < \chi_k; \end{cases} \quad (5)$$

где использованы следующие обозначения:

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{3}\lambda\pi m, \quad v(\chi) = \frac{\text{sh}^2(\chi/2)}{\text{ch}(\chi/2)}, \quad u(\chi) = \frac{\text{ch}^2(\chi/2)}{\text{sh}(\chi/2)}. \quad (6)$$

В уравнении (1) для p -состояний с потенциалом (5) произведём замену функции:

$$\psi_1(\chi_q, \chi_p) = G_0(E_q, E_p)\phi_1(\chi_q, \chi_p), \quad (7)$$

после чего получим уравнение для введенной функции $\phi_1(\chi_q, \chi_p)$:

$$\begin{aligned} \phi_1(\chi_q, \chi_p) = A \frac{m}{(2\pi)^3} & \left(\int_0^{\chi_p} u(\chi_p)v(\chi_k)G_0(E_q, E_k)\phi_1(\chi_q, \chi_k)d\chi_k + \right. \\ & \left. + \int_{\chi_p}^{\infty} u(\chi_k)v(\chi_p)G_0(E_q, E_k)\phi_1(\chi_q, \chi_k)d\chi_k \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя формулу для определения производной по параметру для интегралов, в которых и подынтегральная функция, и один из пределов интегрирования зависят от этого параметра [2, 3], найдём вторую производную по χ_p от функции $\phi_1(\chi_q, \chi_p)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_1(\chi_q, \chi_p)}{d\chi_p^2} = A \frac{m}{(2\pi)^3} & \left(\int_0^{\chi_p} v(\chi_k) \frac{d^2u(\chi_p)}{d\chi_p^2} G_0(E_q, E_k)\phi_1(\chi_q, \chi_k)d\chi_k + \right. \\ & \left. + \int_{\chi_p}^{\infty} u(\chi_k) \frac{d^2v(\chi_p)}{d\chi_p^2} G_0(E_q, E_k)\phi_1(\chi_q, \chi_k)d\chi_k + \frac{3}{2}G_0(E_q, E_p)\phi_1(\chi_q, \chi_p) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом вторые производные функций $u(\chi_p)$ и $v(\chi_p)$ по χ_p можно представить в виде:

$$\frac{d^2u(\chi_p)}{d\chi_p^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\text{cth}^2(\chi_p/2) - 1}{\text{sh}(\chi_p/2)} + \text{sh}(\chi_p/2) \right), \quad (10)$$

$$\frac{d^2v(\chi_p)}{d\chi_p^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{-2\text{th}^2(\chi_p/2) + 1}{\text{ch}(\chi_p/2)} + \text{ch}(\chi_p/2) \right). \quad (11)$$

При умножении функции (8) на сумму $\left(\operatorname{th}^2 \frac{\chi_p}{2} + \operatorname{cth}^2 \frac{\chi_p}{2} \right)$ можно получить выражение, в котором содержится вторая производная функции $\phi_1(\chi_q, \chi_p)$ по χ_p (9). Это означает, что интегральное уравнение (8) можно свести к дифференциальному:

$$\left(\operatorname{th}^2 \frac{\chi_p}{2} + \operatorname{cth}^2 \frac{\chi_p}{2} - 3 \frac{m}{(2\pi)^3} AG_0(E_q, E_p) - \frac{3}{2} \right) \phi_1(\chi_q, \chi_p) = 2 \frac{d^2 \phi_1(\chi_q, \chi_p)}{d\chi_p^2}. \quad (12)$$

Таким образом, для трехмерного потенциала, задаваемого в импульсном представлении формулой (4), получено выражение для соответствующего ему парциального потенциала (5) в случае $l = 1$, и показано, что для него интегральное уравнение (8), соответствующее p -состояниям, сводится к дифференциальному уравнению (12).

Литература

1. Капшай, В. Н. Решения релятивистских двухчастичных уравнений с произвольным орбитальным моментом / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 34–43.
2. Смирнов, В. И. Курс высшей математики : в 2 т. / В. И. Смирнов. – 24-е изд. – СПб. : БВХ-Петербург, 2008. – 2 т.
3. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2022. – ч. 2.