

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

И. К. ЛИФАНОВ

О РАЗМЕРНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 V 1972)

К. Нагами ⁽¹⁾ построил пример нормального пространства Z , для которого верны равенства*:

$$\text{ind } Z = 0, \quad \dim Z = 1, \quad \text{Ind } Z = 2.$$

В данной заметке доказано, что для любых трех чисел l, m, n ($n \geq l$, $n \geq m$ и $m \neq 0$) существует нормальное пространство $\Pi(l, m, n)$, для которого верны равенства

$$\text{ind } \Pi(l, m, n) = l, \quad \dim \Pi(l, m, n) = m, \quad \text{Ind } \Pi(l, m, n) = n.$$

1. **Определение 1.** Пространство X назовем связным относительно пары непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 , если их нельзя отделить в X пустым множеством.

Лемма 1. Нормальное пространство X имеет $\text{Ind } X \geq 1$ тогда и только тогда, когда существует пара замкнутых подмножеств F_1 и F_2 ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$), относительно которых X связно.

Лемма 2. Пусть X_1 — подпространство пространства X , а X_2 — подмножество X_1 , связанное относительно пары замкнутых в нем множеств F_1 и F_2 ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$). Пусть G — такое открытое множество пространства X , что $G \cap X_2 \neq \emptyset$, $F_1 \subset G$ и $F_2 \subset X_2 \setminus \overline{G}$.

Тогда выполняется одно из следующих условий:

1) существует такое множество U , открытое в X_1 , что $U \cap X_2 \neq \emptyset$ и $U \subset \text{Gr } \overline{G} = \overline{G} - G$, или

2) $\overline{G} \cap X_1 \cap X_1 \setminus \overline{G} \cap X_2 \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $U = Z_1 \setminus (\overline{G} \cap X_1 \cup \overline{X_1} \setminus \overline{G})$. Тогда множество U открыто в X_1 и $U \subset \text{Gr } G$. Если $U \cap X_2 = \emptyset$ и $\overline{G} \cap X_1 \cap X_1 \setminus \overline{G} \cap X_2 = \emptyset$, то X_2 не связно относительно F_1 и F_2 ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$), так как $\overline{G} \cap X_1 \cap X_2 = F_1$, а $\overline{X_1} \setminus \overline{G} \cap X_2 = F_2$. Пришли к противоречию.

2. Пусть X и Z паракомпактны. Обозначим через $Y_x(X, Z)$ пространство, получаемое из топологического произведения $X \times Z$ следующим образом: окрестности точек множества $x \times Z$ оставляем прежними, а все точки пространства $X \times Z$, не входящие в это множество, объявляем открытыми. Отметим, что пространство $Y_x(X, Z)$ паракомпактно. Проектирование f_x пространства $Y_x(X, Z)$ на пространство X является почти открытым** отображением в каждой точке множества $x \times Z$. Далее, $\text{Ind } Y_x(X, Z) = \text{Ind } Z$, $\dim Y_x(X, Z) = \dim Z$ и $\text{ind } Y_x(X, Z) = \text{ind } Z$.

3. **Предложение 1.** Пусть P — паракомпактное пространство, $S \subset P$ — замкнутое множество, и пусть для каждой окрестности U множества S найдется всегда открыто-замкнутая окрестность $V \subset U$.

* ind — индуктивная малая размерность, определяемая по границам окрестностей точек. $\dim$ — размерность, определяемая через конечные открытые покрытия. Ind — большая индуктивная размерность, определяемая по границам окрестностей замкнутых множеств.

** Отображение f пространства Y на пространство X называется почти открытым в точке $y \in Y$, если для любой окрестности O точки y имеется такая окрестность $V \subseteq O$ этой точки, что множество $f(V)$ является окрестностью точки $f(y)$.

Пусть $\text{Ind } S = m \geq 0$, и пусть для каждого замкнутого $Q \subset P$, непересекающего S , $\text{Ind } Q \leq n$. Пусть, далее, существует такое непрерывное отображение φ пространства P на S , что $\varphi(x) = x$ для $x \in S$.

Тогда $\text{Ind } P \leq m + n$.

Предложение 1 является переформулировкой теоремы 1.3 П. Военки (²) для паракомпактных пространств.

4. Пусть X и Z паракомпактны. Пусть мощность пространства X и мощность его базы $G = \{A_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$, не превосходят τ , где τ — регулярное кардинальное число. Возьмем дискретное множество N точек мощности не меньшей τ , причем каждой точке $x \in X$ в соответствие поставлено подмножество N_x точек, равномощное множеству N и $N_{x_1} \cap N_{x_2} = \emptyset$ при $x_1 \neq x_2$. Каждому числу $n \in N$ в соответствие поставим пространство $Y_n(X, Z) = Y_x(X, Z)$, если $n = n_x \in N_x$ и дискретное пространство $Y_n(X, Z)$, непрерывно отображающееся на X для $n \in N \setminus \bigcup_{x \in X} N_x$. Обозначим через f_n естественное отображение $Y_n(X, Z)$ на X .

Определим пространство $\Pi(X, f_n, Y_n(X, Z), N) = \Pi$ на дискретной сумме X и $\{Y_n(X, Z), n \in N\}$ следующим образом:

- 1) все $Y_n(X, Z)$ полагаются открыто-замкнутыми,
- 2) окрестностями точек $x \in X$ считаем множества $O \cup \{f_n^{-1}(O), n \in N \setminus K\}$, где O — окрестность точки x в X , а K — произвольное конечное подмножество множества N .

З а м е ч а н и е 1. Если для любой точки $p \in \Pi$ положить $\varphi(p) = x$ при $p = x \in X$ или $p = (x, z)$ принадлежащей одному из $Y_n(X, Z)$, то легко проверяется, что φ является непрерывным отображением пространства Π на X .

П р е д л о ж е н и е 2. Пространство $\Pi(X, f_n, Y_n(X, Z), N) = \Pi$ является паракомпактом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что пространство Π является хаусдорфовым. Пусть теперь $w = \{G_\beta\}$, $\beta \in B$, — произвольное открытое покрытие пространства Π . Для каждой точки $x \in X$ возьмем окрестность $Ox \cup \{f_n^{-1}(Ox), n \in N \setminus K_x\}$, вписанную в некоторый элемент покрытия w . В открытое покрытие $\{Ox\}$ пространства X впишем локально-конечное покрытие $\{\mathcal{V}_\gamma\}$, $\gamma \in C$. Тогда система открытых в пространстве Π множеств $\Gamma_\gamma = \mathcal{V}_\gamma \cup \{f_n^{-1}(\mathcal{V}_\gamma), n \in N \setminus K_x\}$, $\gamma \in C$, где x — какая-нибудь такая точка пространства X , что $\mathcal{V}_\gamma \subset Ox$, локально конечна. Множество $\Pi \setminus \bigcup_{\gamma \in C} \Gamma_\gamma = F$ замкнуто в Π . Обозначим $F_n = F \cap Y_n(X, Z)$. Ясно, что для $n = n_x \in N_x$ множество $(x \times Z)_{n_x}$ либо лежит в F_{n_x} , либо с ним не пересекается. Возьмем произвольное множество $\bar{\Gamma}_\gamma$. Тогда множество $\bar{\Gamma}_\gamma \cap F_{n_x}$ или равно множеству $(x \times Z)_{n_x}$ или пусто, причем если выполняется первая возможность, то $x \in \text{Gr } \mathcal{V}_\gamma$. Множество этих точек x дискретно в X , поэтому, так как X — паракомпакт, можно взять такие окрестности O^*x для каждой указанной точки x , что они попарно не пересекаются и образуют локально конечную систему множеств в X . Теперь вместо множества Γ_γ возьмем открытое множество $\Gamma'_\gamma = \Gamma_\gamma \setminus (\bigcup_{n_x} (f_n^{-1}(O^*x) \cap F_{n_x}))$, где $F_{n_x} \cap \Gamma_\gamma = x \times Z$. Полученная

система открытых множеств $\{\Gamma'_\gamma\}$, $\gamma \in C$, также локально конечна в Π , а $Y_n(X, Z) \setminus \bigcup_{\gamma \in C} \Gamma'_\gamma$ — открыто-замкнутое подмножество для любого $n \in N$, являющееся паракомпактом. Поэтому систему открытых множеств $\{\Gamma'_\gamma\}$ можно дополнить до открытого локально конечного покрытия всего пространства Π , вписанного в покрытие w .

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства предложения 2 следует, что для любой окрестности U пространства X в Π существует открыто-замкнутая окрестность V пространства X такая, что $V \subset U$.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть U и V — открытые в Π множества и $\overline{U \cap X} \cap \overline{V \cap X} = \emptyset$. Тогда $\overline{U} \cap \overline{V}$ содержит часть, гомеоморфную пространству Z .

Это предложение доказывается почти так же, как теорема 2.4 в статье (²).

Предложение 4. Для пространства Π выполняются следующие соотношения:

$$\dim \Pi = \max (\dim X, \dim Z),$$

$$\text{Ind } \Pi \leq \text{Ind } X + \text{Ind } Z.$$

Первое соотношение следует из теоремы Даукера ⁽³⁾. Второе соотношение следует из п. 2, предложения 1, замечаний 1 и 2.

5. Теорема 1. Если пространство X паракомпактно с $\dim X > 0$, то существует паракомпакт $\Pi \supset X$, обладающий следующими свойствами:

$$1) \dim \Pi = \dim X;$$

$$2) \text{Ind } \Pi \leq 3 \text{Ind } X;$$

3) существует такое замкнутое множество F в Π и окрестность U этого множества в Π , что любая окрестность $G \subset U$ этого множества содержит в своей границе замкнутое подмножество, гомеоморфное пространству X .

Доказательство. Возьмем пространство $\Pi' = \Pi(X, f_n, Y_n(X, Z), N)$. По предложению 2, это пространство паракомпактно. Из предложения 4 имеем

$$\dim \Pi' = \dim X, \quad \text{Ind } \Pi' \leq \text{Ind } X + \text{Ind } X = 2 \text{Ind } X.$$

Теперь возьмем пространство

$$\Pi = \Pi(\Pi', f_m, Y_m(\Pi', X), M).$$

Оно также паракомпактно и

$$\dim X = \dim \Pi, \quad \text{Ind } \Pi \leq \text{Ind } \Pi' + \text{Ind } X \leq 3 \text{Ind } X.$$

Так как $\dim X > 0$, то и $\text{Ind } X > 0$. Следовательно, существуют два замкнутых множества F и Φ в $X (F \cap \Phi = \emptyset)$, относительно которых X связано. Пусть теперь U — такая окрестность множества F в Π , что $\Phi \subset X \setminus \bar{U}$ и $G \subset U$ — произвольная окрестность множества F . Тогда, по лемме 2 ($X_2 = X, X_1 = \Pi', X = \Pi$), могут выполняться два условия:

1) существует такое открытое в Π' множество $\mathcal{V}$, что $\mathcal{V} \cap X \neq \emptyset$ и $\mathcal{V} \subset \text{Gr } G$, или

$$2) \overline{G \cap \Pi'} \cap \overline{\Pi' \setminus G} \cap X \neq \emptyset.$$

Если выполняется условие 1), то такое открытое множество содержит копию X ; если выполняется условие 2), то, по предложению 3, $\overline{\mathcal{V} \cap \Pi} \setminus \overline{\mathcal{V}}$ содержит копию пространства X . Но так как $\overline{\mathcal{V} \cap \Pi} \setminus \overline{\mathcal{V}} \subset \text{Gr } \mathcal{V}$, то это и доказывает теорему.

6. Теорема 2. Пусть теперь n — произвольное натуральное число. Существует паракомпакт X такой, что

$$\text{ind } X = 0, \quad \dim X = 1, \quad \text{Ind } X = n.$$

Доказательство. Пусть P — пример Р. Роя ⁽⁵⁾. Пространство P метризуемое и

$$\text{ind } P = 0, \quad \dim P = \text{Ind } P = 1.$$

Более того, каждое открытое множество этого пространства содержит гомеоморфный образ всего пространства. Поэтому, как следует из леммы 2 и предложения 3, для пространства $\Pi = \Pi(P, f_m, Y_m(P, P), U)$ выполняется равенство $\text{Ind } \Pi = 2$.

Из предложения 4 следует, что $\dim \Pi = 1$. Легко показать, что $\text{ind } \Pi = 0$.

Предположим теперь, что для $n \geq 2$ существует такой паракомпакт $\Pi(0, 1, n)$, что $\text{Ind } \Pi(0, 1, n) = n$, $\dim \Pi(0, 1, n) = 1$, $\text{ind } \Pi(0, 1, n) = 0$. Тогда, по теореме 1, существует такой паракомпакт Y , содержащий пространство $\Pi(0, 1, n)$, что

$$\dim Y = \dim \Pi(0, 1, n) = 1, \quad \text{Ind } Y > \text{Ind } \Pi(0, 1, n) = n,$$

и $\text{Ind } Y < 3 \text{Ind } \Pi(0, 1, n)$. Так как $\text{ind } \Pi(0, 1, n) = 0$, то можно считать и $\text{ind } Y = 0$.

По определению большой индуктивной размерности, в паракомпакте Y для любого натурального числа m ($n < m \leq \text{Ind } Y$) можно взять такое замкнутое подмножество Φ , что $\text{Ind } \Phi = m > 0$ и потому $\dim \Phi \geq 1$. Очевидно, $\text{ind } \Phi = 0$.

Теорема 2 доказана.

7. Теорема 3. Для любых чисел $m \leq n$ существует такое нормальное пространство X , что

$$\text{ind } X = 0, \quad \dim X = m, \quad \text{Ind } X = n.$$

Доказательство. Ю. М. Смирнов ⁽⁴⁾ построил пример нормального пространства Y с $\text{ind } Y = 0$, $\dim Y = \text{Ind } Y = m$ для любого целого $m \geq 0$. Поэтому достаточно взять дискретное объединение этого пространства Y и пространства $\Pi(0, 1, n)$. Будем обозначать это пространство через $\Pi(0, m, n)$.

8. Пространства $\Pi(l, m, n)$, указанные во введении, строятся следующим образом: если $l \leq m$, то возьмем дискретное объединение l -мерного куба I^l и пространства $\Pi(0, m, n)$; если $l > m$, но $l \leq n$, то возьмем дискретное объединение бикompакта Y с $\dim Y = m$, $\text{ind } Y = l$ (см. ⁽²⁾) и пространства $\Pi(0, 1, n)$. В этом случае пространство $\Pi(l, m, n)$ является паракомпактом.

Поступило
3 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. Nagami, J. Math. Soc. Japan, 18, 158 (1966). ² П. Воппенка, Czechoslov. Math. J., 8, 319 (1958). ³ C. H. Dowker, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 101 (1955). ⁴ Ю. М. Смирнов, ДАН, 123, 40 (1958). ⁵ P. Roy, Bull. Am. Math. Soc., 68, 609 (1962).