

Л. А. ЛЮКСЕМБУРГ

О ТРАНСФИНИТНЫХ ИНДУКТИВНЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 9 VI 1972)

В п. 1 и 2 мы рассматриваем лишь метрические пространства, если не оговорено противное. Под размерностью ind (соответственно Ind) мы понимаем малую индуктивную (соответственно большую индуктивную) трансфинитную размерность. Для пространств X и Y , $\text{diam } Y < \infty$, через $C(X, Y)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$ с метрикой $d(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_2(x))$, где ρ — метрика в Y . Заметим, что пространство $C(X, Y)$ полно, если Y полно.

1. Теорема 1. Пусть в пространстве X со счетной базой фиксирована счетная система замкнутых множеств C_i , $i = 1, 2, \dots$

Тогда множество Ψ таких гомеоморфизмов пространства X в гильбертов куб I^∞ , что для каждого i выполняются равенства

$$a) \text{Ind } C_i = \text{Ind } \overline{f(C_i)}, \quad б) \text{ind } C_i = \text{ind } \overline{f(C_i)},$$

содержит всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $C(X, I^\infty)$.

В случае, когда размерности $\text{Ind } C_i$ конечны, эта теорема была доказана Гуревичем ⁽¹⁾.

Следствие 1. Для любого пространства X со счетной базой, имеющего размерность $\text{Ind } X$, существует компактификация cX такая, что

$$\text{Ind } cX = \text{Ind } X, \quad \text{ind } cX = \text{ind } X.$$

Лемма 1. Пусть в пространстве X фиксированы два замкнутых множества A и B и $C = A \cap B$.

Тогда множество Φ отображений f пространства X в компакт Z таких, что

$$\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \overline{f(C)},$$

имеет тип G_δ в пространстве $C(X, Z)$.

Лемма 2. Если в лемме 1 $Z = I^\infty$, то множество Φ всюду плотно в $C(X, Z)$.

Лемма 3. Для любого пространства Z , имеющего трансфинитную размерность $\text{Ind } Z$, справедливы следующие утверждения:

а) $\text{Ind } Z \leq \alpha$ тогда и только тогда, когда для любых дизъюнктивных замкнутых множеств F и G , $F \cup G \subseteq P(Z)$ * существует разделяющая их в Z перегородка C размерности $\text{Ind } C < \alpha$;

б) $\text{ind } Z \leq \beta$ тогда и только тогда, когда для любой точки p и замкнутого множества $F \ni p$, $\{p\} \cup F \subseteq P(Z)$, существует разделяющая их в Z перегородка C размерности $\text{ind } C < \beta$ ($\alpha \geq \beta \geq \omega_0$).

Следствие 2. Если X — пространство, имеющее трансфинитную размерность $\text{Ind } X$, и Y — его S -слабо бесконечномерное подмножество ⁽⁴⁾, то $\text{Ind } Y \leq \text{Ind } X$.

* Множеством $P(Z)$ мы называем такое замкнутое подмножество пространства Z , что $Z \setminus P(Z)$ есть объединение всех открытых конечномерных подмножеств в Z ⁽¹⁴⁾. По теореме Скляренко ⁽³⁾ $P(Z)$ — компакт, если Z S -слабо бесконечномерно.

Лемма 4. Пусть $\text{Ind } X = \alpha$, $\text{ind } X = \beta$ ($\alpha \geq \beta \geq \omega_0$) и $\lambda_\gamma = \{U_\gamma^i: \gamma \in \Gamma\}$, $i = 0, 1$, — две такие системы открытых в X множеств, что для всех $\gamma \in \Gamma$ имеем:

$$1) \text{Ind Fr } U_\gamma^0 < \alpha,$$

$$2) \text{ind Fr } U_\gamma^1 < \beta,$$

3) λ_0 образует большую базу $P(X)$ в X^* , а λ_1 образует базу $P(X)^{**}$ в X .

Тогда, если f — отображение пространства X в компакт Z , являющееся гомеоморфизмом на $P(X)$ и удовлетворяющее условиям:

$$4) \text{Ind Fr } f(U_\gamma^0) = \text{Ind Fr } U_\gamma^0,$$

$$5) \text{ind Fr } f(U_\gamma^1) = \text{ind Fr } U_\gamma^1,$$

$$6) \text{Fr } f(U_\gamma^i) = f(\text{Fr } U_\gamma^i), \quad i = 0, 1,$$

$$7) f(P(X)) = P(f(X)),$$

то а) $\text{Ind } \overline{f(X)} = \text{Ind } X$, б) $\text{ind } \overline{f(X)} = \text{ind } X$.

Теорема 2. Пусть X есть пространство веса τ и $\{C_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, — счетная система замкнутых множеств.

Тогда множество Ψ таких равномерно-нульмерных отображений f пространства X в гильбертовы кубы I^ω , что для каждого i выполняются условия:

$$а) \text{Ind } C_i = \text{Ind } \overline{f(C_i)},$$

$$б) \text{ind } C_i = \text{ind } \overline{f(C_i)},$$

в) ограничение f на $P(C_i)$ есть гомеоморфизм, содержит всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $C(X, I^\omega)$.

Если отказаться от требования $\text{ind } C_i \geq \omega_0^2$ для некоторых i , то утверждение теоремы 2 останется верным, если выбросить равенство б) для этих i .

Эта теорема опирается на следующее утверждение.

Лемма 5. Если в пространстве X дана счетная система замкнутых множеств C_i , $i = 1, 2, \dots$, конечной размерности, то множество R равномерно-нульмерных отображений $f: X \rightarrow I^\omega$ таких, что $\text{Ind } C_i = \text{Ind } \overline{f(C_i)}$ для всех $i = 1, 2, \dots$ содержит всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $C(X, I^\omega)$.

Следствие 3. Для пространства X , имеющего размерность $\text{Ind } X$ и $\text{ind } X \geq \omega_0^2$, существует бикомпактное расширение bX того же веса, что и X , причем выполняются равенства:

$$а) \text{Ind } bX = \text{Ind } X, \quad б) \text{ind } bX = \text{ind } X.$$

Если не требовать, чтобы $\text{ind } X \geq \omega_0^2$, то выполняется только условие а).

Заметим, что требование $\text{ind } X \geq \omega_0^2$ нельзя отбросить, как показывает пример Роя (*).

Утверждение а) следствия 3 было независимо получено Б. А. Пасынковым для произвольных нормальных пространств (**).

Теорема 3. Пусть в пространстве X лежит пространство Y со счетной базой, имеющее размерность $\text{ind } Y$.

Тогда в X существует такое множество G типа G_δ , что $Y \subset G$ и $\text{ind } G = \text{ind } Y$.

Это утверждение обобщает теорему Тумаркина (s).

Следствие 4. Любое пространство X со счетной базой имеет пополнение $\bar{X}$ размерности $\text{ind } \bar{X} = \text{ind } X$.

* Это означает, что для любых замкнутых дизъюнктивных множеств F и G , лежащих в $P(Z)$, существует U_γ^0 такое, что $F \subset U_\gamma^0 \subset X \setminus G$.

** Базой множества A мы называем фундаментальную систему окрестностей в точках A .

Теорема 4. Для любого пространства Y , имеющего размерность $\text{Ind } Y$ и лежащего в пространстве X , существует такое множество G типа G_0 , $Y \subset G \subset X$, что $\text{Ind } G = \text{Ind } Y$.

Если Y имеет счетную базу, то можно дополнительно потребовать, чтобы $\text{ind } G = \text{ind } Y$.

Следствие 5. Любое пространство Y , имеющее размерность $\text{Ind } Y$, допускает пополнение $\bar{Y}$ такое, что $\text{Ind } \bar{Y} = \text{Ind } Y$.

Если Y имеет счетную базу, то можно потребовать, чтобы и $\text{ind } \bar{Y} = \text{ind } Y$.

Следующий пример показывает, что существование размерности Ind является существенным требованием в теореме 1 и следствии 1.

Пример полного пространства X со счетной базой, имеющего размерность $\text{ind } X = \omega_0$ и не содержащегося ни в каком компакте той же размерности ind .

Заметим, что если $\text{ind } Y < \omega_0$ и Y имеет счетную базу, то по теореме Гуревича ⁽¹⁾ существует компакт $\bar{Y} \supset Y$ с условием $\text{ind } \bar{Y} = \text{ind } Y$.

Построение. Пусть Z есть дискретная сумма кубов I^n , $n = 1, 2, \dots$. Выберем в каждом кубе I^n две точки u^n и v^n , лежащие на противоположных $(n-1)$ -мерных гранях. Положим $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u^n\}$ и $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{v^n\}$. Тогда

U и V — два таких замкнутых дизъюнктивных множества, что любая перегородка C между ними имеет размерность $\text{ind } C \geq \omega_0$. Возьмем счетное число экземпляров Z_p , $p = 1, 2, \dots$, пространства Z . Множество в Z_p , соответствующее множеству $A \subset Z$, мы будем обозначать через A_p . В множестве $\bigcup_{p=1}^{\infty} Z_p$, взятом в топологии дискретного объединения пространств

Z_p , $p = 1, 2, \dots$, произведем следующие отождествления: точку v_p^n склеим с точкой u_{p+1}^n для каждых натуральных n и p . Мы получим пространство $\tilde{X} = \bigcup_{p=1}^{\infty} Z_p$, причем $Z_p \cap Z_{p+1} = V_p = U_{p+1}$. Положим $X = \tilde{X} \cup \{\delta\}$, где в точке δ топологию задаем базисом $G_{k+1} = X \setminus \bigcup_{p=1}^k Z_p$, $k = 1, 2, \dots$, а в точках $\tilde{X}$ топология остается прежней. Поскольку $\text{Fr } G_{k+1} = V_k$ и множество V_k счетно, имеем $\text{ind}_\delta X \leq 1$.

Пространство X , очевидно, полно, метризуемо, имеет счетную базу и $\text{ind } X \leq \omega_0$. Докажем, что оно не содержится ни в каком компакте размерности $\leq \omega_0$.

Доказательство. Допустим противное, тогда существует компакт $Y \supset X$ и $\text{ind } Y \leq \omega_0$. Отсюда и из теоремы суммы для конечномерных замкнутых множеств следует, что $\text{Ind } Y \leq \omega_0$. Рассмотрим окрестность O_δ в Y точки δ такую, что $O_\delta \cap U_1 = \emptyset$. Тогда из условия $\text{Ind } Y \leq \omega_0$ следует, что существуют окрестности W_i , $i = 1, 2, \dots$, точки δ такие, что для всех i

$$\bar{W}_i \subset O_\delta, \quad \bar{W}_i \subset W_{i+1}, \quad \text{ind Fr } \bar{W}_i < \omega_0.$$

Поскольку множества G_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, образуют базис в точке δ , найдется такое натуральное m , что $\bar{G}_m \subset W_1$. Следовательно, множества U_k при $k \geq m+1$ содержатся в W_1 .

Докажем, что $U_m \setminus \bar{W}_2$ состоит лишь из конечного числа точек. Действительно, если $u_m^{k_1}, u_m^{k_2}, \dots$ — бесконечная последовательность точек, не принадлежащая $\bar{W}_2$, то, поскольку $u_{m+1}^{k_1}, u_{m+1}^{k_2}, \dots \subset U_{m+1} \subset \bar{W}_2$, множество $\text{Fr } \bar{W}_2$ отделяет последовательность $u_m^{k_1}, u_m^{k_2}, \dots$ от последовательности $u_{m+1}^{k_1}, u_{m+1}^{k_2}, \dots$. Следовательно, $\text{Fr } \bar{W}_2$ отделяет точки $u_m^{k_i}$ и $u_{m+1}^{k_i}$ и $\text{ind Fr } \bar{W}_2 \geq k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots$, а так как $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty$, то $\text{ind Fr } \bar{W}_2 \geq \omega_0$,

что противоречит нашему предположению.

Совершенно аналогично тому, как для случая $l = m$, докажем по индукции, что множество $U_l \setminus \bar{W}_{m+2-l}$, $l = 1, 2, \dots, m$, состоит лишь из конечного числа точек. Отсюда, полагая $l = 1$, получаем, что множество

$U_1 \setminus \overline{W}_{m+1}$ конечно, но это противоречит тому, что $\overline{W}_{m+1} \subset O_\delta \subset X \setminus U_1$. Предположение о существовании компакта $Y \supset X$ с условием $\text{ind } Y \leq \omega_0$ привело нас к противоречию.

2. **О п р е д е л е н и е.** Топологическое свойство P называется у н и в е р с а л ь н ы м, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) в любом пространстве X веса τ и мощности 2^τ существует система подмножеств $A = \{A_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ мощности 2^τ такая, что любое подмножество $B \subset X$, обладающее свойством P , содержится в множестве A_γ , обладающем свойством P ; если же B не обладает свойством P , то существует элемент системы A , содержащий B и не обладающий свойством P ;

2) если $\dim Y = 0$, то X обладает свойством P тогда и только тогда, когда $X \times Y$ обладает этим свойством;

3) если $X \subset Y \subset Z$ и X и Z обладают свойством P , то и Y обладает этим свойством.

Лемма 6. Следующие свойства являются универсальными:

- 1) $\dim X = n$;
- 2) $\text{ind } X = \alpha$;
- 3) X не является счетномерным;
- 4) X S -сильно бесконечномерно;
- 5) $T(X) = \beta$;

здесь α, β — порядковые числа, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $T(X)$ — инвариант, введенный в работе ⁽¹⁴⁾.

Теорема 5. Допустим, что P — универсальное свойство и X — пространство веса τ и мощности 2^τ .

Тогда, если класс пространств веса $\leq \tau$, обладающих свойством P , не пуст, то существует пространство Z веса $\leq \tau$ со свойством P , уплотняющееся на X .

С л е д с т в и е 6. Пусть порядковые числа α из свойства 2) леммы 6 и β из свойства 5) той же леммы удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha| \leq \aleph_0, \quad |\beta| \leq \tau.$$

Тогда для пространства X веса τ и мощности 2^τ и для любого из свойств 1) — 5) леммы 6 существует пространство Y с этим же свойством, уплотняющееся на X , причем вес $Y \leq \tau$.

Для случая, когда $\tau = \aleph_0$ и P есть свойство $\dim X = n$, утверждение следствия 6 было доказано Хилгерсом ⁽⁹⁾.

3. **Теорема 6.** Для любой тройки (α, τ, n) , где α — порядковое число $\geq n$, τ — мощность $\geq \aleph_0$, а n — натуральное число и $|\alpha| \leq \tau$, существуют бикомпакты $E_{\alpha\tau}^i$, $i = 1, 2$, веса $\leq \tau$ такие, что $\dim E_{\alpha\tau}^1 = n$, $\text{ind } E_{\alpha\tau}^1 = = \text{Ind } E_{\alpha\tau}^2 = \alpha$.

В случае, когда α есть натуральное число, утверждение теоремы 6 доказано Вопенкой ⁽¹⁰⁾.

С л е д с т в и е 7. Универсальный бикомпакт $X_{n\tau}$ для пространств X данного веса τ и размерности $\dim X \leq n$ не имеет никакой трансфинитной размерности ind или Ind .

По поводу бикомпактов $X_{n\tau}$ см. ^(11, 12).

В заключение автор выражает благодарность Б. А. Пасынкову за советы и интерес к работе.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
3 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Hurewicz, Proc. Acad. Amsterdam, Ser. A, **30**, № 3 (1927). ² М. Катětov, Czechoslov. Math. J. **2**, 333 (1952). ³ Е. Г. Складенко, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, 197 (1959). ⁴ Ю. М. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., **20**, 679 (1956). ⁵ Р. Роу, Bull. Am. Math. Soc., **68**, 609 (1962). ⁶ Б. А. Пасынков, ДАН, **201**, № 5 (1971). ⁷ Б. А. Пасынков, Тр. Московск. матем. общ., **13**, 136 (1965). ⁸ Л. А. Тумаркин, Math. Ann., **98**, 637 (1928). ⁹ А. Hilgers, Fund. Math., **28**, 303 (1937). ¹⁰ Р. Vořenka, Czechoslov. Math. J., **8**, 319 (1958). ¹¹ А. В. Зарелуа, ДАН, **154**, № 5 (1964). ¹² Б. А. Пасынков, ДАН, **154**, № 5 (1964). ¹³ Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **58**, № 4 (1962). ¹⁴ Л. А. Люксембург, ДАН, **199**, № 6 (1971).