

УДК 539.30

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. И. МАЛЫЙ, А. Б. ЕФИМОВ, В. Н. ВОРОБЬЕВ

О РЕШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 8 VI 1971)

Задачи о контакте упругих тел образуют своеобразный класс смешанных граничных задач теории упругости, для которых линия раздела граничных условий заранее неизвестна ⁽¹⁻⁴⁾. Вопрос об определении области соприкосновения деформируемых тел в этих задачах, как правило, не ставился. Исключением являются плоская симметрическая и осесимметрическая задачи, в которых затруднения не возникают ^(2, 4). Но уже в случае взаимодействия гладкого штампа с упругой полуплоскостью по нескольким областям контакта ⁽⁴⁾, когда аналитическое решение общей смешанной задачи известно, определение граничных точек сводится к системе трансцендентных уравнений, которые получаются из условия ограниченности контактного давления. Число областей контакта нужно подбирать из условия неотрицательности давления и требования, чтобы поверхности штампа и упругого тела не пересекались. Трудности существенно возрастают в общем случае, когда аналитического решения нет, а неизвестная граница является пространственной кривой.

Ниже показано, что решения задач для плоских штампов играют фундаментальную роль — их суперпозиция дает решение произвольной контактной задачи. Благодаря этому проблема контакта гладких упругих тел сводится к двум: решению смешанных задач о плоских штампах и определению изменения области контакта в процессе нагружения. Для решения второй проблемы сформулирована система соотношений и предложен численный метод.

1. Пусть α — вектор перемещения одного из контактирующих тел по отношению ко второму, $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — внешняя для первого из тел нормаль в точке $\mathbf{r}$ поверхности, $f_n(\mathbf{r})$ — зазор между телами в ненагруженном состоянии, $K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — увеличение этого зазора в точке $\mathbf{r}$, когда в точке $\mathbf{r}'$ на оба тела действуют единичные сосредоточенные силы нормального давления. Определим расстояние $f(\mathbf{r})$ между ненагруженными телами по направлению α и его увеличение $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ под действием сосредоточенных сил давления:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{f_n(\mathbf{r})}{\mathbf{a}\mathbf{n}(\mathbf{r})}, \quad K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\mathbf{a}\mathbf{n}(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{a} = \frac{\alpha}{\alpha}, \quad \alpha = |\alpha|.$$

Обозначим через $p(\mathbf{r}, \alpha)$, S_α и Γ_α контактное давление, область контакта и ее контур при сближении тел α соответственно. Тогда увеличение расстояния между телами $w(\mathbf{r}, \alpha)$ под действием контактного давления и условия контакта примут вид

$$w(\mathbf{r}, \alpha) = \int \bar{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}', \alpha) dS', \quad (1)$$

$$w(\mathbf{r}, \alpha) = \alpha - f(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r}, \alpha) \geq 0, \quad \mathbf{r} \in S_\alpha;$$

$$w(\mathbf{r}, \alpha) > \alpha - f(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r}, \alpha) = 0, \quad \mathbf{r} \notin S_\alpha. \quad (2)$$

Дифференцируя (1) и (2) по α , получаем соответственно

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} w(\mathbf{r}, \alpha) = \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \alpha} p(\mathbf{r}', \alpha) dS', \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} w(\mathbf{r}, \alpha) = 1, \mathbf{r} \in S_\alpha; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} p(\mathbf{r}, \alpha) = 0, \mathbf{r} \notin S_\alpha. \quad (4)$$

Система (3), (4) совпадает с системой уравнений смешанной задачи о плоском штампе с основанием S_α . Решения $w_0(\mathbf{r}, \Gamma_\alpha)$ и $p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\alpha)$ задачи о плоском штампе с основанием S_α являются функционалами контура Γ_α . Из равенств $\frac{\partial}{\partial \alpha} w(\mathbf{r}, \alpha) = w_0(\mathbf{r}, \Gamma_\alpha)$ и $\frac{\partial}{\partial \alpha} p(\mathbf{r}, \alpha) = p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\alpha)$ следует представление решения контактной задачи (1), (2) в виде *

$$w(\mathbf{r}, \alpha) = \int_0^\alpha w_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau, \quad p(\mathbf{r}, \alpha) = \int_0^\alpha p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau. \quad (5)$$

Из (5) и (2) получаем систему условий для определения Γ_τ :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha w_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau &= \alpha - f(\mathbf{r}), \quad \int_0^\alpha p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau \geq 0, \quad \mathbf{r} \in S_\alpha, \\ \int_0^\alpha w_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau &> \alpha - f(\mathbf{r}), \quad \int_0^\alpha p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau = 0, \quad \mathbf{r} \notin S_\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулированные соотношения позволяют обнаружить некоторые общие свойства решений контактных задач. Если $p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) > 0$, $\mathbf{r} \in S_\tau$, то внешность S_α является внешностью для всех S_τ , $0 \leq \tau \leq \alpha$; в противном случае нарушается последнее из условий (6). Поэтому S_α не убывает по α , а $p(\mathbf{r}, \alpha)$, $\mathbf{r} \in S_\alpha$, — монотонно возрастающая функция α . S_α может изменяться немонотонно по α в случае неположительности $p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau)$, что имеет место для тел с тонким упругим покрытием ⁽⁸⁾.

2. Пусть выполняется условие

$$p_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) > 0, \quad \mathbf{r} \in S_\tau. \quad (7)$$

Тогда S_α растет монотонно и определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha g(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau &= f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_\alpha, \quad \int_0^\alpha g(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) d\tau < f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin S_\alpha, \\ g(\mathbf{r}, \Gamma_\tau) &= 1 - w_0(\mathbf{r}, \Gamma_\tau), \end{aligned}$$

а другие два из соотношений (6) выполняются автоматически. Приближенное решение Γ_τ^* построим, удовлетворяя соотношениям

$$\left| f(\mathbf{r}) - \int_0^\alpha g(\mathbf{r}, \Gamma_\tau^*) d\tau \right| < \delta, \quad \mathbf{r} \in S_\alpha^*, \quad \int_0^\alpha g(\mathbf{r}, \Gamma_\tau^*) d\tau < f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin S_\alpha^*. \quad (8)$$

Это можно сделать, если искать решение Γ_τ^* в классе кусочно-постоянных. Например, в задачах о контакте гладких упругих тел удобно использовать следующий вариант метода коллокаций. Пусть контуры $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ уже определены так, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(\mathbf{r}, \Gamma_i) (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} g(\mathbf{r}, \Gamma_i) (\alpha_{i+1} - \alpha_i) < f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin S_n. \quad (9)$$

Тогда Γ_{n+1} определим как геометрическое место корней уравнения

$$\sum_{i=0}^n g(\mathbf{r}, \Gamma_i) (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin S_{n+1}, \quad (10)$$

* Подобное представление решения осесимметрической контактной задачи для полупространства использовалось В. И. Моссаковским ⁽⁵⁾.

а внешность области S_{n+1} определим неравенством

$$\sum_{i=0}^n g(r, \Gamma_i) (a_{i+1} - a_i) < f(r), \quad r \notin S_{n+1}. \quad (11)$$

Можно показать, что области S_n монотонно растут, а δ в (8) имеет порядок шага по α .

Определив S_n^* , получим решение задачи (1), (2) по формулам (5). Существенно, что каждая точка контура Γ_n находится независимо от остальных как корень уравнения (10). Это в вычислительном отношении принципиально проще подбора области, для которой решение уравнения (1) удовлетворяло бы условиям контакта (2).

3. Рассмотрим новый класс контактных задач о вдавливании в упругое полупространство (модуль сдвига G , коэффициент Пуассона ν) выпуклого штампа формы

$$f(r) = f(\eta), \quad 2\eta^2 = d^2 + r^2 + ((d^2 + r^2)^2 - 4d^2x^2)^{1/2}, \quad (12)$$

сечения которого являются софокусными эллипсами

$$\frac{x^2}{\eta^2} + \frac{y^2}{\eta^2 - d^2} = 1, \quad d \leq \eta < \infty, \quad (13)$$

где η — большая полуось проходящего через точку r эллипса из семейства (13). Этот класс охватывает контактные задачи от осесимметричных ($d=0$) до пространственных с сильно вытянутой областью контакта (^{7, 8}). Выберем в качестве контура Γ_0 эллипс из семейства (13) с большой полуосью a_0 . Решение задачи о таком плоском штампе известно (³). Подставляя его в (10), убеждаемся, что Γ_1 и все последующие Γ_n принадлежат семей-

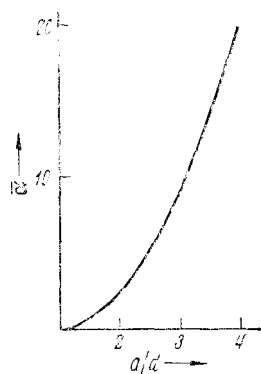


Рис. 1

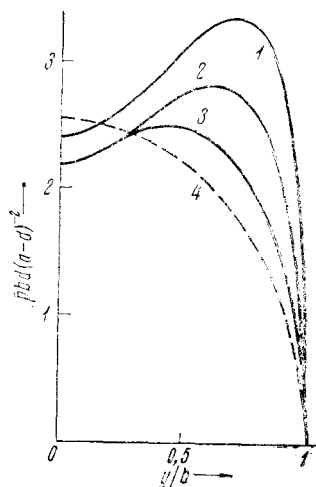
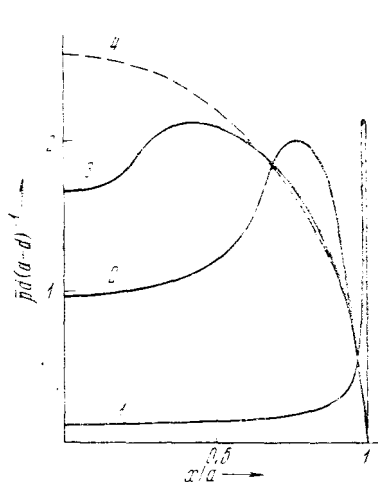


Рис. 2

ству (13). Если уже определены $a_1, \dots, a_{n-1}$, большая полуось a_n контура Γ_n определяется как корень трансцендентного уравнения, имеющего единственный ненулевой корень. При этом погрешность δ в (8) будет меньше $\max |a_{i+1} - a_i|$.

Была решена задача о контакте с упругим полупространством штампа формы $f(r) = A(\eta - d)^2$, который при $r \sim d$ существенно отличается от

осесимметричного, а при $r \gg d$ асимптотически приближается к параболическому $f(r) = Ar^2$. Расчеты производились на БЭСМ-6.

Зависимость внедрения $\alpha = Ad^2\bar{\alpha}(a/d)$ от большой полуоси a границы области контакта представлена на рис. 1 для интервала $a < 4d$. При $a = 4d$ область контакта практически становится кругом ($a = 1,035 b$, b — малая полуось границы области контакта). Как оказалось, функцию $\bar{\alpha}$ можно аппроксимировать выражением

$$\bar{\alpha}\left(\frac{a}{d}\right) = \left(\frac{a}{d} - 1\right)^2 \left(2 + \ln \frac{a - 0,15d}{a - d}\right),$$

погрешность которого на интервале $d < a < 4d$ не превышает 1% от максимального значения. (Для сравнения напомним, что для параболического штампа $f(r) = Ar^2$ имеет место зависимость $\alpha = 2Aa^2$.)

На рис. 2, а, б представлены распределения давления $p(r) = G(1 - \nu)^{-1}Ad\bar{p}(r)$ вдоль большой (x) и малой (y) полуосей области контакта. Кривые 1, 2, 3 построены для значений $a = 1,005d$; $1,5d$ и $4d$ соответственно. Здесь же для сравнения приведены кривые 4, описывающие распределение давления $(8/\pi)[1 - (r/a)^2]^{1/2}$ в осесимметричной задаче Герца и являющиеся предельными кривыми нашей задачи для $a \gg d$. Как и следовало ожидать в случае $a - d \ll d$, кривая 1 (рис. 2а) для $x < a$ мало отличается от распределения давления под плоским штампом $a/(x^2 - x^2)^{1/2}$. Лишь при $x = 0,95a$ отличие между ними достигает 5%. При $a - d \ll d$ область контакта сильно вытянута ($b \ll d$). Для $y \ll d$ форма рассматриваемого здесь штампа в поперечном сечении плоскостью $x = 0$ описывается уравнением $f(r) = 0,25 Ad^{-2}y^4$. Поэтому было интересно сравнить кривую 1 (рис. 2б) с решением плоской задачи для штампа, задаваемого параболой 4 степени. Как оказалось, он совпадает по форме с точностью до 1%.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт физико-технических
и радиотехнических измерений

Поступило
23 V 1971

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Лив, Математическая теория упругости, М., 1935. ² Л. А. Галии, Контактные задачи теории упругости, М., 1953. ³ А. И. Лурье, Теория упругости, М., 1970. ⁴ И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, М., 1949. ⁵ В. И. Моссаковский, ПММ, 27, в. 3, 418 (1963). ⁶ А. Б. Ефимов, В. И. Малыш, Н. М. Толкачева, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 1, 166 (1969). ⁷ А. Н. Грубин, Сборн. научн. тр. Куйбышевск. индустриальн. инст., в. 4 (1953). ⁸ И. Я. Штаерман, Сборн. Проблемы механики сплошной среды, М., 1961.