Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 2

УДК 518:517.944/.947 МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ В ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 VI 1972)

В настоящей статье используются без оговорок обозначения и терминология статьи (1).

I. Пусть $\omega_q(t)$, $0 \leqslant |q| \leqslant s-1$,— исходные функции, удовлетворяющие тождествам (7) статьи (1), и $\varphi_{hqj}(x) = \omega_q(x/h - j)$ — соответствующие координатные функции вариационно-разностного метода. Справедливы следующие

Утверждения. а) *Пусть производные $D^\alpha\omega_q(t)$, $|\alpha| = s$, терпят разрывы только первого рода и только на плоскостях $t_i = 0, 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $u \in C^{(s)}(\overline{\Omega})$, и пусть удовлетворены краевые условия*

$$D^\gamma u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 \leqslant |\gamma| \leqslant s-1. \tag{1}$$

Тогда на любом компакте $K \subset \Omega$ равномерно

$$D^\alpha u_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} D^\alpha u(x), \quad |\alpha| = s, \tag{2}$$

где

$$u_h(x) = \sum_{|q|=0}^{s-1} \sum_{j\in J} h^{|q|} D^q u((j+1)h)\varphi_{hqj}(x), \tag{3}$$

для точек x, лежащих на границах меньших кубов сетки, производная $D^\alpha\varphi_{hqj}(x)$ заменяется ее предельным значением изнутри куба.

b) *Если, кроме того, $u \in C^{(s,\lambda)}(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda \leqslant 1$, то равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$*

$$\max_{x\in K} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u_h(x)| = O(h^\lambda), \quad |\alpha| = s. \tag{4}$$

II. Результаты заметки (1), а также результаты п. 1 настоящей заметки переносятся и на тот случай, когда условия (1) не удовлетворены. Чтобы убедиться в этом, достаточно продолжить функцию $u(x)$ на все пространство E_m с сохранением класса так, чтобы продолженная функция равнялась нулю вне некоторого шара. Область Ω предполагается такой, что указанное продолжение выполнимо. Формула (3) должна быть несколько видоизменена.

III. В пространстве E_2 рассмотрим круг радиуса единица с центром в начале координат. Построим криволинейную сетку, проведя окружности $r = jh_1$, $j = 1, 2, \ldots, 2n_1$, и лучи $\theta = kh_2$, $k = 0, 1, \ldots, 2n_2 - 1$; $h_1 = 1/(2n_1)$, $h_2 = \pi/(2n_2)$. Здесь r, θ — полярные координаты с центром в центре круга.

Пусть t — вещественная переменная и

$$\omega_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2-t, & 1 < t \leqslant 2, \end{cases} \tag{5}$$

— исходная функция для одномерного дифференциального уравнения второго порядка. Пусть

$$\varphi_{hjk}(x) = \omega_0(r/h_1 - j)\,\omega_0(\theta/h_2 - k). \tag{6}$$

Система (6) полна в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(K)$, где K — упомянутый выше круг.

Справедливы следующие оценки: если $u|_{r=1} = 0$ и $u \in C^{(2,\lambda)}(K)$, $\lambda > 0$, то

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}(K)} = O(h), \quad h^2 = h_1^2 + h_2^2; \tag{7}$$

если $u|_{r=1} = 0$, $u \in C^{(2)}(K)$ и мы для простоты предположим, что величины h_1 и h_2 одного порядка малости, то

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}(K)} = O(h\sqrt{\ln(1/h)}); \tag{8}$$

здесь $u = u(r, \theta)$ и

$$u_h(r, \theta) = \sum_{j=0}^{2n_1-2} \sum_{k=0}^{2n_2-1} u((j+1)h_1, (k+1)h_2)\,\varphi_{hjk}(x).$$

IV. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\varphi(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x). \tag{9}$$

Допустим, что $\varphi \in C[0, 1] \cap C^{(1)}(0, 1)$, а коэффициент q измерим, ограничен и неотрицателен. Пусть $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) > 0$, $x > 0$, так что уравнение (9) вырождается в точке $x = 0$ и только в этой точке. Наконец, примем, что $f \in L_2(0, 1)$.

Подробнее рассмотрим случай

$$\varphi(x) = x^\lambda p(x), \quad \lambda = \mathrm{const} > 0, \quad p(x) \geqslant p_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{10}$$

Обозначим через A_0 оператор, который действует по формуле

$$A_0 u = -\frac{d}{dx}\varphi(x)\frac{du}{dx} \tag{11}$$

и определен на функциях, удовлетворяющих следующим условиям: а) $u(x)$ и $\varphi(x)u'(x)$ непрерывны на полуинтервале $(0, 1]$ и абсолютно непрерывны на любом сегменте $[\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$; если $0 < \lambda < 1$, то функция $u(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$; б) $A_0 u \in L_2(0, 1)$; в) если $0 < \lambda < 1$, то $u(0) = u(1) = 0$; г) если $\lambda \geqslant 1$, то $u(1) = 0$. Обозначим еще $Au = A_0 u + qu$. Известно [2], что оператор A_0 положительно определенный в $L_2(0, 1)$, если $0 < \lambda \leqslant 2$, и только положительный в том же пространстве, если $\lambda > 2$. В последнем случае будем считать, что коэффициент q положительно ограничен снизу, так что оператор A все же будет положительно определенным в $L_2(0, 1)$.

Можно доказать, что любое множество, полное в $\overset{\bullet}{W}{}_2^{(1)}(0, 1)$, полно также в энергетической норме оператора A; последняя определяется формулой

$$|u|^2 = \int_0^1 [\varphi(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x)]\,dx. \tag{12}$$

Доказательство основано на том, что решение однородного уравнения (9), принадлежащее энергетическому пространству оператора A, есть тождественный нуль. В метрике (12), в частности, полна система координатных функций вариационно-разностного метода, порожденная исходной функцией (5):

$$\varphi_{hj}(x) = \omega_0\left(\frac{x}{h} - j\right), \quad h = \frac{1}{2n}, \quad j = 0, 1, \ldots 2n-2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Обозначим

$$E_n(u) = \inf_{a_j}\left|u - \sum_{j=0}^{2n-2} a_j\varphi_{hj}\right|. \tag{14}$$

Ниже приводятся некоторые оценки величины (14) для решения $u(x)$ уравнения $Au = f$, где A — описанный выше оператор; в случае $0 < \lambda < 1$ наши результаты можно получить также методами статьи ([3]).

$$1)\ 0 < \lambda < 1, \quad E_n(u) = O(h^{(1-\lambda)/2}). \tag{15}$$

Оценка (15) точная; она достигается при некотором свободном члене $f \in C^\infty[0, 1]$.

$$2)\ 1 \leqslant \lambda < 2, \quad E_n(u) = O(h^{1-\lambda/2}). \tag{16}$$

Оценка (16) «почти точная»: можно указать такую функцию $f_\varepsilon \in L_2(0, 1)$ $\forall \varepsilon > 0$, что для соответствующего решения $u_\varepsilon(x)$ справедливо неравенство $E_n(u_\varepsilon) \geqslant h^{1-\lambda/2}\sigma_\varepsilon(h)$, где, например, $\sigma_\varepsilon(h) = [\ln(2/h)]^\varepsilon$.

Если $f \in L_s(0, 1)$, $2 < s < \infty$ и $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$, то

$$E_n(u) = O(h^{(3-\lambda)/2-1/s}); \tag{17}$$

оценка (17) верна и при $s = \infty$, если коэффициент q положительно ограничен снизу.

3) $2 < \lambda < 5/2$, $0 \leqslant 1/s < 5/2 - \lambda$, коэффициент q положительно ограничен снизу:

$$f \in L_s(0, 1), \quad E_n(u) = O(h^{5/2-\lambda-1/s}). \tag{18}$$

Остановимся на случае, когда коэффициент $\varphi(x)$ не имеет вида (10); точное описание оператора A_0 для этого случая дано в ([2]). Пусть функция $\psi \in C[0, 1]$. Показателем вырождения функции ψ в точке $x = 0$ назовем вещественное число λ (если оно существует) такое, что $x^{-\mu}\psi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ при $\mu < \lambda$ и $x^{-\mu}\psi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$ при $\mu > \lambda$. Допустим, что в уравнении (9) коэффициент $\varphi(x)$ имеет при $x = 0$ показатель вырождения $\lambda \geqslant 0$, а производная $\varphi'(x)$ имеет при том же $x = 0$ показатель вырождения $\lambda - 1$. Тогда оценки (15) — (18) остаются в силе, если в них заменить λ на $\lambda + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. В аналоге оценки (15) допустимо значение $\lambda = 0$.

Аналоги оценок (15) и (16) «почти точны»: можно найти такую функцию $f \in C^{(\infty)}[0, 1]$, чтобы при $0 < \lambda < 1$ было $E_n(u) \geqslant h^{(1-\lambda+\varepsilon)/2}$, и такую функцию $f \in L_2(0, 1)$, чтобы при $1 < \lambda < 2$ было $E_n(u) \geqslant h^{1-(\lambda-\varepsilon)/2}$ $\forall \varepsilon > 0$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, ДАН, 200, № 3, 526 (1971). [2] С. Г. Михлин, Вестн. Ленингр. унив., № 8, сер. матем., мех. и астр., 19 (1954). [3] Ю. А. Гусман, Л. А. Оганесян, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, № 2, 351 (1965).