

П. Г. ПАРФЕНОВ

К ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 31 V 1972)

Понятие совершенной размерности бикомпактов введено в работе ⁽¹⁾. В этой же работе показано, что из совершенной n -мерности бикомпакта X следует совпадение трех основных размерностных инвариантов $\dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X = n$. Оставалось неясным, следует ли из этого совпадения размерностей совершенная n -мерность бикомпакта X . В настоящей заметке дается отрицательный ответ на этот вопрос.

Под разбиением w будем понимать покрытие пространства X конечным числом канонических замкнутых множеств с дизъюнктивными ядрами. Точка x есть точка k -кратности относительно разбиения w , если любая открытая окрестность точки x пересекается не менее чем с k различными элементами разбиения. Система $A = \{w_\alpha\}$ разбиений w_α называется измельчающейся последовательностью разбиений, если: а) для любого замкнутого множества $F \subseteq X$ и любой его открытой окрестности OF существует разбиение $w \in A$, что $\text{St}_w F \subseteq OF$; б) для любых двух разбиений $w_1, w_2 \in A$ существует $w_3 \in A$, $w_3 \supset w_1$, $w_3 \supset w_2$. L_ω — трансфинитная прямая длины ω , между трансфинитами α и $\alpha + 1$ подклеен сегмент $I_\alpha = [0, 1]_\alpha$ (0 склеивается с α , 1 — с $\alpha + 1$).

Предложение 1. Пространство $Y = L_{\omega_1} \times L_{\omega_2}$ не совершенно 2-мерно.

Достаточно показать, что любая измельчающаяся последовательность A разбиений пространства Y содержит разбиение кратности ≥ 4 хотя, как следует из работы ⁽²⁾, $\dim Y = \text{ind } Y = \text{Ind } Y = 2$.

Символом $\text{Fr } w$ для любого разбиения w топологического пространства будем обозначать дополнение до объединения внутренних частей всех элементов разбиения w . Множество P будем называть множеством k -кратности относительно разбиения w , если для любой точки $x \in P$, x есть точка k -кратности относительно разбиения w .

Лемма 1. Пусть на $X = L_\omega \times I$ существует измельчающаяся последовательность A разбиений и существует разбиение $w \in A$ такое, что $\text{Fr } w \cap \{(\omega) \times I\} \supseteq (\omega) \times (a, b)$ — отрезок трехкратности относительно разбиения w .

Тогда существует такое разбиение $w_1 \in A$, что w_1 является не менее чем четырехкратным разбиением.

Доказательство. Выберем сегмент $[a_1, b_1] \subseteq (a, b)$, тогда для замкнутого множества $F = L_\omega \times [0, a_1]$ и открытого множества $G = L_\omega \times [0, b_1]$, содержащего множество F , существует разбиение $w' \in A$ такое, что $\text{St}_{w'} F \subseteq G$. В дальнейшем множество $\text{St}_{w'} F$, построенное для таких специальных множеств F и G , будем обозначать как $\text{St}(w', [a_1, b_1])$. Множество $F_1 = \text{Fr}\{\text{St}(w', [a_1, b_1])\} \cap \{(\omega) \times I\} \subset (\omega) \times (a_1, b_1)$, а точка $(\omega, \bar{x})$, где $\bar{x} = \max\{x \in (a_1, b_1) : (\omega, x) \in F_1\}$, есть точка четырехкратности для разбиения $w_1 \in A$ ($w_1 \supset w$, $w_1 \supset w'$). Лемма доказана.

Пусть A — измельчающаяся последовательность разбиений на пространстве $X = L_\omega \times I$, а U — открытое подмножество пространства X такое, что $[U] \cap \{(\omega) \times I\} \supseteq (\omega) \times (c, d)$, еще дан сегмент $[c_1, d_1] \subset (c, d)$. Существует разбиение $w \in A$, по которому можно построить множество $K = \text{Fr}\{\text{St}(w, [c_1, d_1])\}$.

Лемма 2. Если множество $K_1 = K \cap ((\omega) \times (c, d))$ не содержит отрезка двукратности относительно разбиения w пространства $[U]$, то существует такое трансфинитное число $\alpha \in L_\omega$ и такое нигде не плотное в (c, d) множество C , что $U \cap K \cap ([\alpha, \omega] \times I) = U \cap ([\alpha, \omega] \times C)$.

Доказательство. Положим $U_1 = U \cap \text{Int} \{ \text{St}(w, [c_1, d_1]) \}$, $U_2 = U \cap \text{Int} \{ X \setminus \text{St}(w, [c_1, d_1]) \}$, $Z = L_\omega \times (x)$ и рассмотрим два множества: $V_1 = \{x \in (c, d) : U_1 \cap Z \text{ конфинально } (\omega, x) \text{ в } Z \text{ и } U_2 \cap Z \text{ не конфинально } (\omega, x) \text{ в } Z\}$, $V_2 = \{x \in (c, d) : U_2 \cap Z \text{ конфинально } (\omega, x) \text{ в } Z \text{ и } U_1 \cap Z \text{ не конфинально } (\omega, x) \text{ в } Z\}$.

В силу неравенства $\chi(\omega, L_\omega) \neq \chi(x, I)$ и того, что множество K_1 не содержит отрезка двукратности, получаем $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1, V_2 открыты в (c, d) , $[V_1 \cup V_2] = (c, d)$ в (c, d) . Пусть $C = (c, d) \setminus (V_1 \cup V_2)$, и лемма 2 легко получается.

Лемма 3. Пусть дана измельчающаяся последовательность A разбиений пространства $X = L_\omega \times I$, тогда существует множество $B = \{w_k : k = 1, 2, \dots\}$ разбиений из системы A и множество $Q = [\alpha, \omega] \times [f, h] = W_1 \cup W_2 \cup F$ ($W_1 \cap W_2 = \emptyset$, W_1, W_2 открыты в Q , F замкнуто и нигде не плотно в Q) такие, что для любого открытого элемента (f^k, h^k) счетной базы на (f, h) существует такое $w_k \in B$, что при этом выполнены условия

$$\text{Fr} \{ \text{St}(w_k, [f^k, h^k]) \} \cap W_1 = (L_\omega \times C_k) \cap W_1,$$

$$\text{Fr} \{ \text{St}(w_k, [f^k, h^k]) \} \cap W_2 = (L_\omega \times D_k) \cap W_2,$$

$$\text{Fr} \{ \text{St}(w_k, [f^k, h^k]) \} \subset [0, \omega] \times (f^k, h^k),$$

где C_k и D_k нигде не плотны в (f, h) .

Доказательство. 1) Если для любого множества (f^k, h^k) существует разбиение $w_k \in A$ такое, что $\text{Fr} \{ \text{St}(w_k, [f^k, h^k]) \} \cap ((\omega) \times I)$ не содержит отрезка двукратности относительно разбиения w_k , то $B = \{w_k : k = 1, 2, \dots\}$ и, полагая в лемме 2 $U = L_\omega \times I$, получаем утверждение леммы 3.

2) Если же для некоторого элемента (f_1, h_1) базы на I и любого разбиения $w' \in A$ множество $\text{Fr} \{ \text{St}(w', [f_1, h_1]) \} \cap ((\omega) \times I)$ содержит отрезок $(\omega) \times (c_2, d_2)$ двукратности относительно разбиения w' пространства X , то множества $U' = \text{Int} \{ \text{St}(w', [f_1, h_1]) \}$ и $U'' = X \setminus \text{St}(w', [f_1, h_1])$ удовлетворяют условиям леммы 2. Действительно, если для некоторого $[c_3, d_3] \subset (c_2, d_2)$ существует разбиение w'' такое, что множество $\text{Fr} \{ \text{St}(w'', [c_3, d_3]) \} \cap ((\omega) \times I)$ содержит отрезок $(\omega) \times (c_4, d_4)$, то это отрезок трехкратности для любого разбиения w ($w > w'$, $w > w''$). По лемме 1 это влечет не совершенную 2-мерность пространства Y . Если такого разбиения w'' не существует, то, полагая сначала $U = U'$, а потом $U = U''$, $[f, h] = [c_2, d_2]$ и применяя лемму 2, где (c, d) — элемент счетной базы отрезка (c_2, d_2) , получаем лемму 3.

Доказательство предложения 1. Пусть на пространстве Y дана измельчающаяся система разбиений. Для любого $\beta < \omega_2$ подпространство $X_\beta = L_{\omega_1} \times I_\beta \subseteq Y$; согласно лемме 3 существуют множества B_β и $Q = [\alpha_\beta, \omega_1] \times [f, h]_\beta$, а из несовпадения $\chi(\omega_1, L_{\omega_1})$ и $\chi(\omega_2, L_{\omega_2})$ следует, что существует $\bar{\alpha}$ и множество $M = \{\beta < \omega_2 : \alpha_\beta < \bar{\alpha}\}$, конфинальное ω_2 . Для пространства $X^{\bar{\alpha}} = I_{\bar{\alpha}} \times L_{\omega_2}$ также справедлива лемма 3: существуют множества $B^{\bar{\alpha}}$ и $Q^{\bar{\alpha}} = [\beta', \omega_2] \times [f, h]^{\bar{\alpha}}$.

Тогда при некотором $\bar{\beta} > \beta'$, где $\bar{\beta} \in M$, $Q^{\bar{\alpha}} \cap Q_{\bar{\beta}} \neq \emptyset$ и содержит открытое множество, например, $V = \text{Int}(W_1^{\bar{\alpha}} \cap W_{1\bar{\beta}})$, где $W_1^{\bar{\alpha}}$ и $W_{1\bar{\beta}}$ получаются из леммы 3. Пусть открытое множество $W = (f^{\bar{\alpha}}, h^{\bar{\alpha}}) \times (f_{\bar{\beta}}, h_{\bar{\beta}}) \subset V$. Следовательно, существуют разбиения $w^{\bar{\alpha}}$ и $w_{\bar{\beta}}$ и множества $C^{\bar{\alpha}}$ и $C_{\bar{\beta}}$, что $W \cap \text{Fr} \{ \text{St}(w^{\bar{\alpha}}, [f^{\bar{\alpha}}, h^{\bar{\alpha}}]) \} \cap \text{Fr} \{ \text{St}(w_{\bar{\beta}}, [f_{\bar{\beta}}, h_{\bar{\beta}}]) \} = W \cap (L_{\omega_1} \times C_{\bar{\beta}}) \cap (C^{\bar{\alpha}} \times L_{\omega_2})$,

а это множество является множеством четырехкратности для любого разбиения w ($w > w\tilde{\alpha}$, $w > w\tilde{\beta}$).

Предложение 1 доказано.

Относительно совершенной размерности справедлива еще

Теорема 1. *K — упорядоченный континуум, I — сегмент действительной прямой; тогда $K \times I$ совершенно 2-мерно.*

Кроме того, с существенным использованием континуум-гипотезы ($c = \aleph_1$) можно доказать, что тихоновский квадрат лексикографически упорядоченного квадрата совершенно 2-мерен.

Автор выражает благодарность В. И. Пономареву за помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, В. И. Пономарев, Сибирск. матем. журн., 1, № 1 (1960). ² И. К. Лифанов, ДАН, 180, № 3 (1968).