

С. С. САННИКОВ

К ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $\overline{SL(2, \mathbb{C})}$

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 7 IV 1972)

1. Рассматриваются представления группы $\overline{SL(2, \mathbb{C})}$ с комплексными весами и отвечающие им поля. Эти поля играют роль «скрытых параметров» в единой теории элементарных частиц и являются основным объектом EQ-теории (теории вакуума). Формальным служит следующее

Определение 1. Под полем в EQ-теории понимается некоторое сечение $f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x)$ расслоения $\mathbf{R}_{3,1} \otimes \Phi'_{\lambda, \lambda}$, $x \in \mathbf{R}_{3,1}$ — пространство Минковского, $f^{(\lambda, \lambda)} \in \Phi'_{\lambda, \lambda}$, удовлетворяющее уравнению

$$P_\mu^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь

$\Phi'_{\lambda, \lambda} = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \Phi'_{(\lambda - \bar{\lambda} + q, 0)} = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \Phi'_{(\lambda - \bar{\lambda} + q, \lambda + \bar{\lambda} + 1 + p)^+} = \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \Phi'_{(\lambda + \bar{\lambda} + 1 + p, 0)}$ — бесконечная прямая сумма счетного числа пространств $\Phi'_{(\lambda - \bar{\lambda} + q, \lambda + \bar{\lambda} + 1 + p)^+} = \overline{\Phi'_{\bar{\lambda} + (p-q)/2}} \otimes \Phi'_{\lambda + (p+q)/2}$ (черта означает комплексное сопряжение), $\Phi'_{\lambda, \bar{\lambda}}$ — пространства обобщенных функций показательного типа⁽¹⁾, $2\lambda, 2\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ — внутренние степени свободы поля (λ — комплексный спин). Под сопряженным полем понимается сечение $f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x) = f_\alpha^{(-\bar{\lambda}-1, -\bar{\lambda}-1)}(x)$, $f^{(-\bar{\lambda}-1, -\bar{\lambda}-1)} \in \Phi'_{-\bar{\lambda}-1, -\bar{\lambda}-1}$. Существует четыре моды поля (1). Им отвечают операторы

$p_\mu^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, действующие в $\Phi'_{\lambda, \lambda}$ и записываемые в виде

$$p_\mu^{(1)} = ik\bar{\Psi}\gamma_\mu P_+\Psi, \quad p_\mu^{(2)} = ik\bar{\Psi}\gamma_\mu P_-\Psi, \quad p_\mu^{(3)} = ik\bar{\Psi}^c\gamma_\mu P_+\Psi, \quad p_\mu^{(4)} = ik\bar{\Psi}\gamma_\mu P_-\Psi^c,$$

где $\Psi^c = C^{-1}\bar{\Psi}$, $\bar{\Psi}^c = C\Psi$, $C = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}^{-1} \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_\pm = 1/2(1 \pm \gamma_5)$,

γ_μ — матрицы Дирака в представлении Вейля, k — константа (см⁽¹⁾), а

$$\Psi_k = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 \otimes a_k}{b^{(\bar{\lambda} + (p-q)/2)k}} \otimes 1 \right), \quad \bar{\Psi}_k = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} (1 \otimes b^{(\lambda + (p+q)/2)k}, -\bar{a}_k \otimes 1)$$

вместе с $E = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} (1 \otimes 1)$ порождают ассоциативную алгебру S с соотношениями коммутации

$$[\Psi_k, \bar{\Psi}_m] = \Psi_k \bar{\Psi}_m - \bar{\Psi}_m \Psi_k = \delta_{km} E, \quad [\Psi_k, \Psi_m] = [\bar{\Psi}_k, \bar{\Psi}_m] = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

(операторы a_k , $b_k^{(\lambda)}$, $k = 1, 2$, введены в⁽²⁾; алгебра S естественным образом вкладывается в $K(z, d/dz) \otimes K(\bar{z}, d/d\bar{z})$, где $K(z, d/dz)$ — тело, рассмотренное в⁽³⁾). Коммутативные подалгебры в S , порождаемые $(E, P_+\Psi, \bar{\Psi}P_-)$, $(E, P_-\Psi, \bar{\Psi}P_+)$, $(E, P_+\Psi, P_-\Psi)$ и $(E, \bar{\Psi}P_-, \bar{\Psi}P_+)$, обозначим

через $S_\alpha p_\mu^{(\alpha)} \in S_\alpha$. Моду с $\alpha = 1$ будем называть основной. Определим еще $L_{\mu\nu} = \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi$, $L_5 = \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$, $A_{\mu\nu}^{(1)} = \bar{\Psi}^c \Sigma_{\mu\nu} \Psi$, $A_{\mu\nu}^{(2)} = \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi^c$, $w_\mu^{(\alpha)} = \bar{L}_{\mu\nu} p_\nu^{(\alpha)}$, $M_{\alpha\beta}^2 = 2 p_\mu^{(\alpha)} p_\mu^{(\beta)}$, где $\bar{L}_{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma_5 \Sigma_{\mu\nu} \Psi$, $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Утверждение 1. *Операторы* $p_\mu^{(\alpha)}$, $L_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}^{(i)}$, L , L_5 , $\bar{L}_{\mu\nu}$, $\bar{A}_{\mu\nu}^{(i)}$ *задают в* $\Phi'_{\lambda, \lambda}$ *представление алгебры Ли 54-параметрической ранга 16 группы Ли* G *такое, что*

$$w_\mu^{(1, 2)} = \pm i \left(\frac{L}{2} + 1 \right) p_\mu^{(1, 2)}, \quad w_\mu^{(3, 4)} = \pm \frac{i}{2} L_5 p_\mu^{(3, 4)},$$

$$\bar{\Psi}^c \Psi = \bar{\Psi} \Psi^c = \bar{\Psi}^c \gamma_5 \Psi = \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi^c = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi^c = A_{\mu\nu}^{(i)} A_{\mu\nu}^{(i)} =$$

$$= A_{\mu\nu}^{(i)} \bar{A}_{\mu\nu}^{(i)} = w^{(\alpha)^2} = p^{(\alpha)^2} = L_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^{(i)} = 0, \quad L_{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 2L + \frac{1}{2} (L^2 + L_5^2),$$

$$L_{\mu\nu} \bar{L}_{\mu\nu} = 2L_5 \left(\frac{L}{2} + 1 \right), \quad A_{\mu\nu}^{(2)} A_{\mu\nu}^{(1)} = 2L - (L^2 + L_5^2), \quad A_{\mu\nu}^{(2)} \bar{A}_{\mu\nu}^{(1)} = -2L_5 (L-1),$$

$$M_{12, 21}^2 = -k^2 [L^2 - L_5^2 + 4(L \pm L_5)],$$

$$M_{34, 43}^2 = k^2 [L^2 - L_5^2 + 4(L+2) \mp 4(L+2)].$$

Остальные $M_{\alpha\beta}^2$ равны нулю.

Группа G имеет четыре подгруппы $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$ ($\mathfrak{P} = T_4 \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ — накрывающая группы Пуанкаре), пересекающиеся по подгруппе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$ связаны с полями $f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x)$. Нас интересует, что происходит с представлением группы G в $\Phi'_{\lambda, \lambda}$ при сужении $G \supset \mathfrak{P}^{(\alpha)}$.

Теорема 1. В $\Phi'_{\lambda, \lambda}$ реализуется представление цепного расслоения * $\mathfrak{P}(\Phi')$ в виде $\bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} (\lambda - \dot{\lambda} + q, 0)$, $\alpha = 1, 2$, или в виде $\bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} (\lambda + \dot{\lambda} + 1 + p, 0)$, $\alpha = 3, 4$, где $(\lambda, 0)$ — неприводимое представление $\widetilde{\mathfrak{P}}$. При сужении $\widetilde{\mathfrak{P}} \supset \widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}$ имеем (2)

$$(\lambda - \dot{\lambda} + q, 0) = \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \left(\overline{\lambda + \frac{p-q}{2}}, \overline{\lambda + \frac{p-q}{2} + 1} \right)^+ \otimes$$

$$\otimes \left(\overline{\lambda + \frac{p+q}{2}}, \overline{\lambda + \frac{p+q}{2} + 1} \right)^+ = \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} (\lambda - \dot{\lambda} + q, \lambda + \dot{\lambda} + 1 + p)^+; \quad (2)$$

аналогично

$$(\lambda + \dot{\lambda} + 1 + p, 0) = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} (\lambda - \dot{\lambda} + q, \lambda + \dot{\lambda} + 1 + p)^+,$$

где $(\lambda, \lambda + 1)^+$, $(\overline{\lambda}, \overline{\lambda + 1})^+ = (\dot{\lambda}, \dot{\lambda + 1})^-$, $(\lambda - \dot{\lambda}, \lambda + \dot{\lambda} + 1)^+$ — неприводимые представления $\widetilde{\mathrm{SL}(r, \mathbb{C})}$ в $\Phi'_{\lambda, \lambda}$, $\Phi'_{\overline{\lambda}, \lambda + \dot{\lambda} + 1}^+$.

На $\Phi'_{(\lambda - \dot{\lambda} + q, \lambda + \dot{\lambda} + 1 + p)^+}$ операторы $\frac{1}{2}L + 1$ и $\frac{1}{2}L_5$ принимают значения $\lambda - \dot{\lambda} + q$ и $\lambda + \dot{\lambda} + 1 + p$.

Замечание 1. Представления $(\lambda, \lambda + 1)^+$, $(\overline{\lambda}, \overline{\lambda + 1})^+$, $(\lambda - \dot{\lambda}, \lambda + \dot{\lambda} + 1)^+$ генерируются операторами $L_{\mu\nu}^{(+)} = \bar{\Psi} P_+ \Sigma_{\mu\nu} \Psi$, $L_{\mu\nu}^{(-)} = \bar{\Psi} P_- \Sigma_{\mu\nu} \Psi$, $L_{\mu\nu}$.

Представления подгруппы T_4 генерируются $p_\mu^{(\alpha)}$. Отображение $(a, v) \mapsto T_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(a, v) = \exp(i P^{(\alpha)} a) T^{(\lambda, \lambda)}(v)$, где

$$T^{(\lambda, \lambda)}(v) = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \overline{T_{\lambda + (p+q)/2}(v)} \otimes T_{\lambda + (p+q)/2}(v), \quad a \in T_4, v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

будет обозначать представление $\widetilde{\mathfrak{P}}$ в $\Phi'_{\lambda, \lambda}$.

* Под цепным расслоением $\mathfrak{P}(\Phi')$ (над группой \mathfrak{P}) понимается группа 1-цепей $\widetilde{\mathfrak{P}}$ топологией, индуцируемой топологией пространства представления Φ' .

Замечание 2. Представление $\overline{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$ в Φ' расширяется до представления $\overline{M(2, \mathbb{C})}$, где $\overline{M(2, \mathbb{C})}$ — моноид 2×2 -комплексных матриц, в частности до $\overline{\text{GL}(2, \mathbb{C})}$ и $\overline{\text{I}(2, \mathbb{C})}$, где

$$\text{GL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes U(1) \otimes H(1) = M - I, \text{ а } I = \{g \in M \mid \det g = 0\}.$$

Для $g \in I$ удобно выбрать параметризацию $g = \begin{pmatrix} \overline{\Phi^2} & \Phi_1 \\ -\overline{\Phi^1} & \Phi_2 \end{pmatrix} = -\overline{\Phi} \times \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma\tau \\ 1 & -\tau \end{pmatrix}$, где $\sigma = \Phi_1/\Phi_2 = -\overline{\Phi^2}/\overline{\Phi^1}$, $\tau = \Phi_2/\overline{\Phi^1} = -\overline{\Phi_1}/\overline{\Phi^2}$.

Через $[n\lambda]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, будем обозначать базис Картана — Вейля представления $(\lambda, \lambda + 1)^+$ в Φ_λ' . В реализации Фока — Баргмана $(^1)$

$$\begin{aligned} [n\lambda] &= i^n 2^{-n} z^{2n} \sqrt{\Gamma(-2\lambda)/n!} \Gamma(n - r\lambda), \quad z \in \mathbb{C}, \\ T_\lambda(g) | n\lambda \rangle &= \sqrt{\Gamma(n - 2\lambda)/n!} \Gamma(-2\lambda) (i\overline{\Phi^1}/\Phi_2)^n (\Phi_2)^{2\lambda} {}_1F_1 \left(-n; -2\lambda; -\frac{z^2 \det g}{2\Phi_1 \overline{\Phi^1}} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{1}{2} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} z^2 \right), \quad g \in M(2, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Утверждение 2. Оператор $T_\lambda(g)$, $g \in I$, проектирует Φ_λ' на одномерное подпространство, натянутое на элемент

$$\exp(1/2\sigma z^2) \in \Phi_\lambda': T_\lambda(g\sigma_1) f^{(\lambda)}(z) = (\overline{-\Phi^1})^{2\lambda} \exp(1/2\sigma z^2) f^{(\lambda)}(\tau),$$

где $f^{(\lambda)}(z)$ и $f^{(\lambda)}(\tau)$ — представления элемента $f^{(\lambda)} \in \Phi_\lambda'$ в реализации Фока — Баргмана и τ -реализации, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Поле $f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x)$ ассоциировано с $\text{I}(2, \mathbb{C})$.

Утверждение 3. Решения уравнений (1) имеют структуру

$$f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x) = E_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x) V_{\alpha'}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ где } E_x^{(\lambda, \lambda)}(x) &= \exp(iP^{(\alpha)}x) \int \hat{T}^{(\lambda, \lambda)}(g\sigma_1) dg, g \in I, \quad dg = |\overline{\Phi'}|^2 d(\overline{\Phi'}) d(\sigma) d(\tau), \\ \hat{T}^{(\lambda, \lambda)}(g) &= \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} [(\lambda - \lambda + q)^2 - (\lambda + \lambda + 1 + p)^2] T_{(\lambda - \lambda + q, \lambda + \lambda + 1 + p)} + g \end{aligned}$$

($d(\tau) = d(\text{Re } \tau) d(\text{Im } \tau)$; для сопряженного поля g' , σ' , τ' , Φ''); $V_{\alpha'}$ — элементы, представимые в виде: $V_{\alpha'} = s_{\alpha'}(\kappa, \dot{\kappa}) f_0^{(\lambda, \lambda)}$, $s_{\alpha'} \in S_{\alpha'}$ (например,

$$s_1(\kappa, \dot{\kappa}) = \prod_{j=1}^{\infty} \overline{a^k}^j \otimes \prod_{i=1}^{\infty} a_{\dot{k}j}^i, f_0^{(\lambda, \lambda)} \in \Phi_{\lambda, \lambda}'.$$

Замечание 3. На структуре $E^{(\lambda, \lambda)}(0)$ имеем $\sigma(\tau)$ — реализацию алгебры S , т. е. при действии на $E^{(\lambda, \lambda)}(0)$ элементами из S слева имеем

$$P_+ \psi = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Psi} P_+ = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - (2\lambda + p + q)}{\frac{\partial}{\partial \sigma}} \right),$$

$$\bar{\Psi} P_- = -\overline{P_+ \psi}, \quad P_- \psi = \overline{\bar{\Psi} P_+},$$

а справа

$$P_+ \psi = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \tau}}{\tau \frac{\partial}{\partial \tau} - (2\lambda + p + q)} \right), \quad \bar{\psi} P_+ = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} \bigoplus_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau} \right),$$

$$P_- \psi = \overline{\bar{\psi} P_+}, \quad \bar{\psi} P_- = - \overline{P_+ \psi}.$$

Определение 2. Преобразования из $T_4 \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$ назовем кинематическими, если они действуют на g в (3) слева.

Утверждение 4. При кинематических преобразованиях

$s_\alpha(k, \dot{k}) f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x) \rightarrow T\left(\dot{\lambda} + \dot{\varepsilon}_\alpha \frac{k}{1}, \lambda + \varepsilon_\alpha \frac{k}{2}\right)(v) s'_\alpha(k, \dot{k}) f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(\Lambda^{-1}(x + a)),$
где $s'_\alpha(k, \dot{k}) = D\left(\frac{\dot{k}-k}{2}, \frac{k+\dot{k}}{2}+1\right)(v) s_\alpha(k, \dot{k})$, $D\left(\frac{\dot{k}-k}{2}, \frac{k+\dot{k}}{2}+1\right)(v)$ — матричные элементы конечномерного неприводимого представления группы $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \ni$
 $\ni v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ веса $\left(\frac{\dot{k}-k}{2}, \frac{k+\dot{k}}{2}+1\right)$, $\varepsilon_\alpha = (-1)^\alpha$, $\dot{\varepsilon}_\alpha = (-1)^{\lfloor \alpha/2 \rfloor + 1}$, $([a] —$ целая часть числа a), $\Lambda \in \text{SO}(3, 1)$; $\sigma \rightarrow \frac{a\sigma + b}{c\sigma + d}$, $\bar{\phi}' \rightarrow \bar{\phi}'(c\sigma + d)$, τ — кинематический инвариант.

4. Из полей $f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x)$ конструируются материальные поля (волновые функции), описывающие элементарные частицы.

Определение 3. Под материальными полями мы понимаем функционалы в EQ-теории

$$\Psi^{(\alpha)}(x) = \langle s_\alpha f_\alpha^{(\lambda, \lambda)}(x), s_1 f_1^{(\lambda, \lambda)}(x) \rangle, \quad (4)$$

где

$$\langle \Phi_{\lambda, \lambda}^{'}, \Phi_{\lambda, \lambda}^{'} \rangle = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\Phi_{(\lambda-\bar{\lambda}+q, -\bar{\lambda}-\bar{\lambda}-1-p)+}^{'}, \Phi_{(\lambda-\lambda+q, \lambda+\lambda+1+p)+}^{'},$$

$\Phi_{\lambda, \lambda}^{'} = \Phi_{-\bar{\lambda}-1, -\bar{\lambda}-1}^{'}$, а $[\cdot, \cdot]$ — полуторалинейный функционал, рассматривавшийся в (1) (В реализации Фока — Баргмана это интеграл на \mathbb{C} с мерой $d\mu(z) = |z|^2 d(z)/2\pi$).

Утверждение 5. Имеют место соотношения: $\psi^+ = \bar{\psi} \gamma_4$, $\psi^+ = \gamma_4 \psi$, где $+$ обозначает сопряжение относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Следствие из утверждения 4 и определения 3. При кинематических преобразованиях $\Psi^{(\alpha)}(x) \rightarrow D(v) \Psi^{(\alpha)}(\Lambda^{-1}(x + a))$, где $D = \overline{D(l_0^{(\alpha)}, l_1^{(\alpha)})} \otimes \overline{D(l_0^{(1)}, l_1^{(1)})}$, $l_0 = \frac{\dot{k}-k}{2}$, $l_1 = \frac{\dot{k}+k}{2} + 1$.

5. Алгебра S (2) и поля (3) — основные объекты шредингеровского представления EQ-теории. Построим гайзенберговское представление $S^{(H)}$ алгебры S : $S^{(H)} \ni s^{(\alpha, \beta)}(x) = \exp(-ip^{(\beta)} x) s \exp(ip^{(\alpha)} x)$.

При условии (1) для $s^{(\alpha, \beta)}(x)$ имеют место некоторые дифференциальные уравнения типа нелинейных уравнений Гайзенберга (4).

Автор выражает признательность акад. Н. Н. Боголюбову за одно замечание, относящееся к этой заметке.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
19 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. С. Санников, Представления группы вращений с комплексным спином и некоторые их применения, Харьков, 1968. ² С. С. Санников, Укр. физ. журн., 12, 872 (1967). ³ С. С. Санников, ДАН, 176, 801 (1967). ⁴ В. Гейзенберг, Введение в единую полевую теорию элементарных частиц, М., 1968.