Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 2

УДК 517.9+517.53

МАТЕМАТИКА

В. П. ТАРЕЕВ

# О РОЖДЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IV 1972)*

В настоящей заметке в окрестности сложного фокуса или центра комплексной динамической системы голоморфного класса

$$\dot{z} = P(z, w), \quad \dot{w} = Q(z, w) \tag{A}$$

строится комплексная функция последования и с ее помощью исследуется вопрос о рождении из сепаратрисного конуса системы (А) при переходе от этой системы к близкой в той же окрестности до некоторого ранга измененной системе

$$\dot{z} = P(z, w) + h(z, w), \quad \dot{w} = Q(z, w) + r(z, w) \tag{$\widetilde{A}$}$$

комплексных предельных цилиндров *. Сопоставление этого рождения с рождением предельных циклов из сложного фокуса действительной динамической системы позволяет установить соответствие между комплексными предельными цилиндрами и действительными предельными циклами. Отсюда можно считать (во всяком случае, в окрестности рассматриваемой особой точки это очевидно) комплексные предельные цилиндры аналогами действительных предельных циклов **.

Естественно также высказать гипотезу, что верхняя оценка числа предельных циклов у вещественной системы алгебраического класса определенным образом связана с числом комплексных предельных цилиндров у «грубой» комплексной системы (А) того же класса.

1. Комплексные траектории системы ($\widetilde{A}$) (система (А) рассматривается как частный случай системы ($\widetilde{A}$) при $h = r \equiv 0$) образуют в окрестности точки $O$ вещественно двумерное слоение с особенностью в $O$ ***. Построим для системы ($\widetilde{A}$) комплексную функцию последования. Для этого запишем систему (А) в модифицированной форме Дюлака [1]:

$$\dot{z} = z, \quad \dot{w} = w[\tilde{\lambda} + \tilde{c}_1 z^p w^q + \ldots + c_{n-1} z^{(n-1)p} w^{(n-1)q} + z^{np} w^{nq} \tilde{F}(z, w)]; \tag{$\widetilde{A}'$}$$

здесь $\tilde{\lambda} = -p/q + \tilde{\mu}$, $\tilde{c}_j$ — константы и $\tilde{F}(z, w)$ — функция, голоморфная в некоторой фиксированной, но могущей быть сколь угодно малой окрестности $G$ точки $O(0, 0)$ в $C^2$ (соответственно $G'(0)$ в $R_4$). Будем в дальнейшем все величины в случае системы (А) обозначать буквами без тильды. В этом случае $|\mu| = 0$.

Введем полярные координаты с помощью формул

$$w = \rho e^{-p\theta}, \quad z = \rho e^{q\theta}, \tag{1}$$

полагая здесь и всюду в дальнейшем $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$, $\rho = \rho^* + i\rho^{**}$, $\theta = \theta^* + i\theta^{**}$. Полярные координаты можно интерпретировать как вращение в плоскости $C^2(z, w)$ около точки $O$ комплексной аналити-

* Каждый комплексный предельный цилиндр является голоморфной интегральной кривой в смысле работы [1].

** Идея обнаружения у комплексной динамической системы аналогов предельных циклов действительной алгебраической системы принадлежит И. Г. Петровскому [2].

*** Гипотеза о бифуркациях слоения (А) сформулирована В. И. Арнольдом в работе [3].

ческой прямой $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 = \mathrm{const}$), уравнение которой

$$z = \exp\left[(p+q)\theta_0\right] \cdot w, \qquad (2)$$

когда $\theta_0$ принимает всевозможные значения. Очевидно, что если зафиксировать лишь $\operatorname{Re}\theta = \theta_0^*$, в то время как $\theta^{**}$ изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, то $\theta^* = \theta_0^*$ определяет в пространстве $R_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$ трехмерную гиперповерхность, проходящую через точку $O$ и расслаивающуюся на двумерные плоскости, комплексное уравнение которых (2). В свою очередь, трехмерные гиперповерхности $\theta^* = \theta_0^*$, рассмотренные для всех $\theta_0^*$, $|\theta_0^*| \leqslant \theta_1^* < \infty$, ометут в $R_4$ некоторую четырехмерную область с центром в точке $O$, которую обозначим $G'_{\theta_1^*}$*.

Переходя теперь в системе $(\widetilde{A}^*)$ к полярным координатам и записывая ее в виде одного уравнения, получаем

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\widetilde{\varphi}(\rho, \theta)}{(1-\widetilde{\lambda}) + \widetilde{\psi}(\rho, \theta)} = \widetilde{R}(\rho, \theta), \qquad (3)$$

где функции $\widetilde{\varphi}(\rho, \theta)$ и $\widetilde{\psi}(\rho, \theta)$ определены и голоморфны в некоторой бикруговой области $\Omega\{|\theta^*| < \delta_1,\ |\rho| < \delta_2(\delta_1),\ |\theta^{**}| < \infty\}$ (причем $\delta_1(\delta_2) \to \infty$, когда $\delta_1 \to 0$) и периодические по $\theta$ с периодом $T = 2\pi i$. Отсюда следует, что при всех достаточно малых значениях $|\mu|$ любая двумерная плоскость $\theta = \theta_0$ (2), проходящая через начало координат в $R_4$ и принадлежащая любой из трехмерных гиперповерхностей $\theta^* = \theta_0^*$, где $|\theta_0^*| < \delta_1$, не имеет контактов с траекториями системы $(\widetilde{A}^*)$ в точках, для которых $0 < |\rho| < \delta_2(\delta_1)$.

Так как знаменатель в правой части уравнения (3) не обращается в нуль при $\rho = 0$, то мы можем разложить функцию $\widetilde{R}(\rho, \theta)$ в ряд по степеням $\rho$:

$$\widetilde{R}(\rho, \theta) = \widetilde{R}_1(\theta)\rho + \widetilde{R}_2(\theta)\rho^2 + \ldots, \qquad (4)$$

где коэффициенты $\widetilde{R}_j$ — периодические функции $\theta$ с периодом $T$.

Ряд (4) будет сходиться в бикруговой области $\Omega_1\{|\theta^*| < \delta_1^*,\ |\rho| \leqslant \delta_2^*,\ 0 \leqslant \theta^{**} \leqslant 2\pi\}$, $0 < \delta_1^* < \delta_1$, $0 < \delta_2^* < \delta_2(\delta_1)$. Легко находим, что

$$\widetilde{R}_1 = \tilde{a}q\tilde{\mu}, \qquad \widetilde{R}_{l(p+q)+j} = 0, \qquad (5)$$

где $\tilde{a} = q / [p + (1-\tilde{\mu})q]$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$; $j = 2, 3, \ldots, p+q$. Остальные коэффициенты могут быть отличными от нуля.

Существует и единственно в области $\Omega_1$ решение уравнения (3)

$$\rho = \widetilde{F}(\theta;\ \theta_0^*,\ \rho_0), \qquad \widetilde{F}(\theta_0^*;\ \theta_0^*,\ \rho_0) \equiv \rho_0 \qquad (6)$$

(где, не нарушая общности, положено $\theta_0^{**} = 0$), которое является голоморфной функцией своих аргументов и, следовательно, может быть разложено в ряд по степеням $\rho_0$:

$$\rho = \widetilde{F}(\theta;\ \theta_0^*,\ \rho_0) = \widetilde{U}_1(\theta)\rho_0 + \widetilde{U}_2(\theta)\rho_0^2 + \ldots \qquad (7)$$

Можно указать, очевидно, такие $\delta_1^{**} > 0$ и $\delta_2^{**} > 0$, чтобы в бикруговой области $\Omega_2$ ($\Omega_2 \subseteq \Omega_1$) ряд (7) сходился, и, учитывая (4)—(6), полностью определить все функции $\widetilde{U}_i(\theta)$. В частности,

$$\widetilde{U}_1(\theta) = \exp\left[\widetilde{R}_1(\theta - \theta_0^*)\right], \qquad U_{m(p+q)+j}(\theta) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$j = 2, 3, \ldots, p+q.$$

Лемма 1. *Пусть $\tilde{c}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, первый отличный от нуля коэффициент в системе $(\widetilde{A}^*)$, тогда первый после $\widetilde{U}_1(\theta)$ коэффициент в разложении (7) функции $\widetilde{F}$, отличный от нуля, будет $\widetilde{U}_{k(p+q)+1}(\theta)$.*

---

* Сепаратрисный конус особой точки $O$ системы $(\widetilde{A}^*)$ области $G'_\theta$, не принадлежит.

На плоскости $\theta = \theta_0^*$ введем комплексный параметр $\rho_0 = \rho_0^* + i\rho_0^{**}$ так, что точке $O$ отвечает значение $\rho_0 = 0$. Рассматривая решение $\rho = \tilde{F}(\theta;\ \theta_0^*,\ \rho_0)$ уравнения (3) при всех достаточно малых по модулю значениях $\rho_0$, $|\rho_0| \leqslant r_0 < \delta_2^{**}$, мы рассмотрим все траектории системы $(\tilde{A}^*)$, проходящие через достаточно близкие к $O$ точки. Для всякого данного $\rho_0$ при $\theta = \theta_0^* + T$ в указанном решении значение $\rho$ соответствует «последующей» точке пересечения траектории с комплексной плоскостью $\theta = \theta_0^*$ *. Поэтому функция

$$\rho = \tilde{F}(\theta_0^* + T;\ \theta_0^*,\ \rho_0) = \tilde{F}(\rho_0;\ \theta_0^*), \tag{8}$$

являясь при фиксированном значении $\theta_0^*$ функцией лишь от $\rho_0$, осуществляет точечное отображение некоторой окрестности начала комплексной плоскости $\theta = \theta_0^*$ на себя.

Назовем функцию (8), определенную в некоторой области $\Omega^*\{|\rho_0| < r^*,\ |\theta_0^*| < \theta_1^*,\ 0 \leqslant \theta_0^{**} \leqslant 2\pi\}$, где $0 < r^* < \delta_2^{**}$, $0 < \theta_1^* < \delta_1^{**}$ комплексной функцией последования в этой области.

Будем рассматривать также в $\Omega^*$ функцию

$$\tilde{\Delta}(\rho_0;\ \theta_0^*) = \tilde{F}(\rho_0;\ \theta_0^*) - \rho. \tag{9}$$

Тогда неподвижной точке отображения (8), являющейся одновременно нулем функции (9) (точка $\rho_0 = 0$ исключается), соответствует такая траектория системы $(\tilde{A}^*)$, через нее проходящая, которая в области $G'_{\theta_1^*}$ является вещественно-двумерной поверхностью, гомеоморфной цилиндру — комплексный цилиндр.

Пусть $O$ — фокус системы $(\tilde{A}^*)$. Тогда значение в точке $O$ $j$-й производной по $\rho_0$ функции (9), т. е. $\tilde{\Delta}^{(j)}(0)$ назовем $j$-й фокусной величиной фокуса $O$. Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Для фокусных величин сложного фокуса $O$ порядка $k$ исходной системы* (A) *имеем*

$$\Delta^{(1)}(0) = \ldots = \Delta^{((p+q)k)}(0) = 0,\ \Delta^{((p+q)k+1)}(0) \neq 0.$$

2. Комплексный цилиндр системы $(\tilde{A})$, отвечающий изолированному нулю (по $\rho_0$) функции $\tilde{\Delta}(\rho_0;\ \theta_0^*)$, будем называть предельным.

Теорема 1. *Если $O(0, 0)$ есть сложный фокус порядка $k$, $k \geqslant 1$, комплексной динамической системы* (A) *голоморфного класса, тогда*:

1) *существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что всякая система $(\tilde{A})$, $\delta_0$-близкая до ранга $N_0 = (p+q)k + 1$ к системе* (A), *имеет не более $k$ комплексных предельных цилиндров в области $G'_{\theta_1^*,\,\varepsilon_0} = G'_{\theta_1^*} \cap G'_{\varepsilon_0}$****;*

2) *для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\delta < \delta_0$ существует комплексная динамическая система $(\tilde{A}_0)$ голоморфного класса, которая $\delta$-близка до ранга $N_0$ к системе $(A)$ и имеет $k$ комплексных предельных цилиндров в $G'_{\theta_1^*,\varepsilon_0}$.*

Теорема 2. *Пусть точка $O(0, 0)$ — центр комплексной динамической системы* (A) *голоморфного класса. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, существует $\delta$-близкая к* (A) *до некоторого ранга $N$ комплексная динамическая система $(\tilde{A})$ такая, что в окрестности $G_\varepsilon'(0)$ у нее существует по крайней мере один комплексный предельный цилиндр.*

Доказательство теорем опирается на построения в п. 1 и работу [1] ***.

Легко видеть, что отображение $\rho = F(\rho_0;\ \theta_0^*)$ комплексной плоскости $\theta = \theta_0^*$ на себя в круге $|\rho_0| < r_0$ ($r_0$ достаточно мало) не может иметь других изолированных неподвижных точек, кроме $\rho_0 = 0$. Отсюда, учитывая [1, 3], естественно также говорить о рождении из сепаратрисного конуса сложного фокуса или центра $O$ системы (A) комплексных пре-

* При этом $|\rho| < r_1$, где малость $r_1$ определяется малостью $r_0$.

** $G'_{\varepsilon_0}$ — окрестность с центром в точке $O$ в эвклидовом пространстве $R_4$ радиуса $\varepsilon_0$.

*** Из теорем 1 и 2 следует по существу справедливость для двумерных комплексных динамических систем гипотезы В. И. Арнольда [3].

дельных цилиндров, когда переход от (А) к близкой измененной системе $(\widetilde{A})$ сопровождается трансверсальным переходом $\tilde{\lambda}$ через однократный резонанс в области Зигеля.

3. Вещественная динамическая система на плоскости, имеющая в точке $O$ $(x=0,\ y=0)$ сложный фокус или центр всегда может быть представлена в виде

$$dx/dt=-y+\varphi^*(x,y),\quad dy/dt=x+\psi^*(x,y), \tag{$B_0$}$$

где голоморфные функции $\varphi^*$ и $\psi^*$ обращаются в точке $O(0,0)$ в нуль вместе со своими производными первого порядка.

Переходя в системе $(B_0)$ сначала к комплексно сопряженным координатам $u=x+iy$, $v=x-iy$, а затем делая замену $u\to z$, $v\to w$, $t\to t'$, где $t'=t_1+it_2$, получаем систему

$$dz/dt'=iz+\Phi(z,w),\quad dw/dt'=-iw+\Psi(z,w), \tag{$A_0$}$$

которую будем называть соответствующей комплексной системой для вещественной системы $(B_0)$.

Переходя в $(B_0)$ к полярным координатам, определяемым из формул $x=\rho^*\cos\theta^{**}$, $y=\rho^*\sin\theta^{**}$, находим функцию $d(\rho_0^*)=f(\rho_0^*)-\rho_0^*$, где

$$\rho^*=f(2\pi;\ 0,\ \rho_0^*)=f(\rho_0^*) \tag{10}$$

— функция последования, построенная для системы $(B_0)$ на прямой $\theta^{**}=0$ [4].

С другой стороны, имеем функцию $\Delta_0(\rho_0)=F_0(\rho_0)-\rho_0$, где

$$\rho=F_0(T;\ 0,\ \rho_0)=F_0(\rho_0) \tag{11}$$

— комплексная функция последования при $\theta_0=0$ системы $(A_0)$, рассмотренной в комплексных полярных координатах (см. (1) при $p=q=1$).

Лемма 3. 1) *Если $d^{(2k+1)}(0)$ — первая, отличная от нуля фокусная величина сложного фокуса $O$ системы $(B_0)$, тогда $\Delta_0^{(2k+1)}(0)$ — первая, отличная от нуля фокусная величина соответствующего сложного фокуса соответствующей системы $(A_0)$; 2) Если $d(\rho_0^*)\equiv 0$ для системы $(B_0)$, тогда $\Delta_0(\rho_0)\equiv 0$ для системы $(A_0)$.*

Выбором комплексного параметра $\rho_0$ на плоскости $\theta=0$ всегда можно добиться того, чтобы точечное преобразование оси $x$ в плоскости $R_2(x,y)$, определяемое функцией последования (10), было частью точечного преобразования комплексной плоскости $z=w$, определяемого комплексной функцией последования (11). Отсюда следует, что одновременно с рождением из сложного фокуса или центра системы $(B_0)$ предельного цикла $l$ происходит рождение из сепаратрисного конуса соответствующей системы $(A_0)$ комплексного предельного цилиндра $L$, на котором лежит цикл $l$.

Теорема 3. *Число предельных циклов, рождающихся из сложного фокуса (центра) действительной системы $(B_0)$, не превосходит числа комплексных предельных цилиндров, рождающихся из сепаратрисного конуса соответствующего сложного фокуса (центра) соответствующей комплексной системы $(A_0)$.*

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Леонтович, В. П. Тареев, ДАН, 207, № 6 (1972). [2] И. Г. Петровский, Е. М. Ландис, Матем. сборн., 37 (79), 209 (1955). [3] В. И. Арнольд. Функциональный анализ, 3, № 1, 1 (1969). [4] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович и др., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, «Наука», 1967.